Aufgabe 16.23

Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 10 & 26 \\ 26 & 10 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$!

Sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal? Sind die Matrizen definit?

Lösung:

Die 4 Matrizen sind symmetrisch, also sind die EV zu verschiedenen EW orthogonal.

Eine reelle symmetrische Matrix heißt positiv definit, wenn $(\boldsymbol{A}\vec{x})\cdot\vec{x} > 0$ für $\vec{x} \neq \vec{0}$.
positiv semidefinit, ≥ 0
negativ definit, < 0
negativ semidefint, ≤ 0
indefinit, wenn es sowohl $\vec{x}$ mit $(\boldsymbol{A}\vec{x})\cdot\vec{x} > 0$ als auch $\vec{x}$ mit $(\boldsymbol{A}\vec{x})\cdot\vec{x} < 0$ gibt.

Definitheit wird z.B. benötigt bei Extremwertuntersuchungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Definitheitsuntersuchung mit Eigenwerten:

alle EW > 0:	positiv definit,
alle EW ≥ 0:	positiv semidefinit,
alle EW < 0:	negativ definit,
alle EW ≤ 0:	negativ semidefinit,
EW unterschiedl. Vz.:	indefinit.

Definitheitsuntersuchung mit Kriterium von Sylvester (auch als Kriterium von Hurwitz oder als Kriterium von Jacobi bekannt):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$$

alle Hauptunterdeterminanten („Hauptminoren“) > 0
$\iff$ positiv definit

Hauptminoren alternierendes Vz., mit $-$ beginnend
$\iff$ negativ definit

Ist ein Hauptminor gerader Ordnung negativ und/oder gibt es Hauptminoren ungerader Ordnung mit entgegengesetztem Vorzeichen, so ist die Matrix indefinit. (Es gibt auch indefinite Matrizen, für die diese Bedingung nicht erfüllt ist.)

a) $\begin{vmatrix} 10-\lambda & 8 \\ 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(10-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 20\lambda + 100 - 64 = \lambda^2 - 20\lambda + 36 = 0,$

$$\lambda_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100-36} = 10 \pm 8 = \begin{cases} 2 \\ 18 \end{cases}$$

EV zu EW $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{array}{cc} 8 & 8 \\ 8 & 8 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

$x_1 + x_2 = 0$

EV $C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2 = 18$:

$$\begin{array}{cc} -8 & 8 \\ 8 & -8 \\ \hline 1 & -1 \end{array}$$

$x_1 - x_2 = 0$

EV $D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, tatsächlich orthogonal.

Beide EW > 0, also positiv definit. Das ergibt sich auch mit dem Kriterium von Sylvester:
$10 > 0$, $\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 100-64 = 36 > 0$, also beide Hauptminoren positiv.

b) $\begin{vmatrix} 10-\lambda & 10 \\ 10 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(10-\lambda) - 100 = \lambda^2 - 20\lambda + 100 - 100 = \lambda^2 - 20\lambda = \lambda(\lambda-20) = 0,$
$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 20$

EV zu EW $\lambda_1 = 0$: $\begin{array}{cc} 10 & 10 \\ 10 & 10 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ EV zu EW $\lambda_2 = 20$: $\begin{array}{cc} -10 & 10 \\ 10 & -10 \\ \hline 1 & -1 \end{array}$

EV und Orthogonalität wie bei a).

Beide EW ≥ 0, also positiv semidefinit. Das Kriterium von Sylvester liefert hier kein Ergebnis:
$10 > 0$, $\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = 0$, also weder positiv noch negativ definit.

c) $\begin{vmatrix} 10-\lambda & 26 \\ 26 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(10-\lambda) - 676 = \lambda^2 - 20\lambda + 100 - 676 = \lambda^2 - 20\lambda - 576 = 0,$
$\lambda_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100+576} = 10 \pm 26 = \begin{cases} -16 \\ 36 \end{cases}$

EV zu EW $\lambda_1 = -16$: $\begin{array}{cc} 26 & 26 \\ 26 & 26 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ EV zu EW $\lambda_2 = 36$: $\begin{array}{cc} -26 & 26 \\ 26 & -26 \\ \hline 1 & -1 \end{array}$

EV und Orthogonalität wie bei a).

EW haben entgegengesetztes Vorzeichen, also indefinit.
Beim Kriterium von Sylvester folgt die Indefinitheit aus der Negativität des 2. Hauptminors:
$10 > 0$, $\begin{vmatrix} 10 & 26 \\ 26 & 10 \end{vmatrix} = -576 < 0$, also indefinit.

d) $\begin{vmatrix} -10-\lambda & -8 \\ -8 & -10-\lambda \end{vmatrix} = (-10-\lambda)(-10-\lambda) - 64 = \lambda^2 + 20\lambda + 100 - 64 = \lambda^2 + 20\lambda + 36 = 0,$
$\lambda_{1/2} = -10 \pm \sqrt{100-36} = -10 \pm 8 = \begin{cases} -2 \\ -18 \end{cases}$

EV zu EW $\lambda_1 = -2$: $\begin{array}{cc} -8 & -8 \\ -8 & -8 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ EV zu EW $\lambda_2 = -18$: $\begin{array}{cc} 8 & -8 \\ -8 & 8 \\ \hline 1 & -1 \end{array}$

EV und Orthogonalität wie bei a).

Beide EW < 0, also negativ definit. Das ergibt sich auch mit dem Kriterium von Sylvester:
$-10 < 0$, $\begin{vmatrix} -10 & -8 \\ -8 & 1-0 \end{vmatrix} = 100-64 = 36 > 0$, also Hauptminoren alternierendes Vorzeichen, mit $-$ beginnend.