

Aufgabe 16.22

Bestimmen Sie die Eigenwerte und mit deren Hilfe die Definitheitseigenschaften der Matrizen aus Aufgabe 16.21 a) – f) !

Lösung:

Definitheitsuntersuchung mit Eigenwerten: alle EW > 0 : positiv definit,
 alle EW ≥ 0 : positiv semidefinit,
 alle EW < 0 : negativ definit,
 alle EW ≤ 0 : negativ semidefinit,
 EW unterschiedl. Vz.: indefinit.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0,$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{12}{4}} > 0 \implies \text{positiv definit}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) = 0,$$

$$\lambda_{1/2} = \begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases} \implies \text{positiv semidefinit}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 9 = \lambda^2 - 5\lambda - 5 = 0,$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{20}{4}}, \quad \left. \begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix} \right\} \implies \text{indefinit}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}}, \quad \left. \begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix} \right\} \implies \text{indefinit}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-2-\lambda) - 1](-2-\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+3) = 0,$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \implies \text{negativ definit}$$

f) s. Aufgabe 16.29: Eigenwerte $-1; -1; 2 \implies$ indefinit