Aufgabe 16.21

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen mit dem Kriterium von Sylvester auf Definitheit:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Eine reelle symmetrische Matrix heißt positiv definit, wenn $(\boldsymbol{A}\vec{x}) \cdot \vec{x} > 0$ für $\vec{x} \neq \vec{0}$.
positiv semidefinit, ≥ 0
negativ definit, < 0
negativ semidefint, ≤ 0
indefinit, wenn es sowohl $\vec{x}$ mit $(\boldsymbol{A}\vec{x}) \cdot \vec{x} > 0$ als auch $\vec{x}$ mit $(\boldsymbol{A}\vec{x}) \cdot \vec{x} < 0$ gibt.

Definitheit wird z.B. benötigt bei Extremwertuntersuchungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Definitheitsuntersuchung mit Eigenwerten:

alle EW > 0:	positiv definit,
alle EW ≥ 0:	positiv semidefinit,
alle EW < 0:	negativ definit,
alle EW ≤ 0:	negativ semidefinit,
EW unterschiedl. Vz.:	indefinit.

Definitheitsuntersuchung mit Kriterium von Sylvester (auch als Kriterium von Hurwitz oder als Kriterium von Jacobi bekannt):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

alle Hauptunterdeterminanten („Hauptminoren“) > 0
$\Longleftrightarrow$ positiv definit

Hauptminoren alternierendes Vz., mit $-$ beginnend
$\Longleftrightarrow$ negativ definit

Ist ein Hauptminor gerader Ordnung negativ und/oder gibt es Hauptminoren ungerader Ordnung mit entgegengesetztem Vorzeichen, so ist die Matrix indefinit. (Es gibt auch indefinite Matrizen, für die diese Bedingung nicht erfüllt ist.)

a) $4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$: Vz. der Hauptminoren $+\,+$, positiv definit

b) $4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$: Vz. der Hauptminoren $+\ 0$, weder positiv noch negativ definit

c) $4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5 < 0$: gerader Hauptminor negativ, indefinit

d) $0>0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0-1=-1<0$: gerader Hauptminor negativ, indefinit

e) $-2<0$, $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4-1=3>0$, $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)<0$: Vz. $-\ +\ -$, neg. definit

f) $0=0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1=-1<0$: gerader Hauptminor negativ, indefinit

g) $5>0$, $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 15-16=-1<0$: gerader Hauptminor negativ, indefinit