Aufgabe 16.20

Obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Hauptdiagonale $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ haben offensichtlich den dreifachen Eigenwert 1. Geben Sie je eine solche Matrix an, für die zu diesem Eigenwert genau ein, genau zwei bzw. genau drei linear unabhängige Eigenvektoren gehören!

Lösung:

Die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts 1 ist 3.

Die Zahl der linear unabhängigen Eigenvektoren (**geometrische Vielfachheit**, Dimension des Eigenunterraums) ist gleich der Zahl der linear unabhängigen Lösungen von $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\vec{x} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\vec{x} = \vec{0}$, also $3-\text{rang}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

Für 3 linear unabhängige Eigenvektoren muss $\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ sein. Daraus folgt $a=b=c=0$.

Für 2 linear unabhängige Eigenvektoren muss $\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ sein. Das ist z.B. für $a=1,\, b=c=0$ erfüllt.

Für 1 linear unabhängigen Eigenvektor muss $\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ sein. Das ist z.B. für $a=1,\, b=0,\, c=1$ erfüllt.

Also hat z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ einen, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zwei und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ drei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 1.