Aufgabe 16.17

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige reelle Matrix vom Typ 2×2.

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte!
b) Wann hat die Matrix zwei voneinander verschiedene reelle Eigenwerte?
c) Wann hat die Matrix zwei voneinander verschiedene komplexe Eigenwerte mit nicht verschwindendem Imaginärteil?
d) Wann hat die Matrix einen doppelten reellen Eigenwert, zu dem zwei voneinander linear unabhängige Eigenvektoren gehören? Geben Sie in diesem Falle auch die Eigenvektoren an!
e) Wann hat die Matrix einen doppelten reellen Eigenwert, zu dem es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor gibt?

Lösung:

a) $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda)-bc = \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2-4ad+4bc}{4}} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}}{4} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$

b) Die Matrix hat zwei voneinander verschiedene reelle Eigenwerte für $(a-d)^2+4bc > 0$.

c) Die Matrix hat zwei voneinander verschiedene komplexe Eigenwerte mit nicht verschwindendem Imaginärteil für $(a-d)^2+4bc < 0$. Diese Eigenwerte sind dann zueinander konjugiert komplex.

d) Die Matrix hat zwei voneinander verschiedene reelle Eigenwerte für $(a-d)^2+4bc = 0$. Man spricht dann davon, dass die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts gleich 2 ist.

Damit es zu diesem Eigenwert zwei linear unabhängige Eigenvektoren gibt, muss dass homogene lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zwei linear unabhängige Lösungen haben. Da die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen eines homogenen Gleichungssystems n minus Rang der Matrix ist, muss rang $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$ und folglich $a-\lambda = b = c = d-\lambda = 0$, d.h. $a = d (= \lambda)$ und $b = c = 0$ sein.

Ein doppelter Eigenwert mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren liegt also genau dann vor, wenn $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ist. a ist dann doppelter Eigenwert. Eigenvektoren sind alle Lösungen von $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$. Zwei linear unabhängige Eigenvektoren sind z.B. die Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In diesem Falle spricht man dann davon, dass auch die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts (Dimension des zugehörigen Eigenunterraums, d.h. der Menge aller Eigenvektoren) gleich 2 ist.

e) Nach dem Ergebnis von d) gibt es einen doppelten Eigenwert (algebraische Vielfachheit 2) mit nur einem linear unabhängigen Eigenvektor (geometrische Vielfachheit 1), wenn $(a-d)^2+4bc=0$ und $b\neq 0$ oder $c\neq 0$ ist.

(${a=d}$ muss nicht explizit gefordert werden, da aus $a\neq d$ für $(a-d)^2+4bc=0$ automatisch $bc\neq 0$ folgt, so dass dann sogar b und c ungleich 0 sind.)