

Aufgabe 16.12

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung:

2 x Entwicklung nach oberster Zeile:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 ((1-\lambda)^2 - 4)$$

$$= (2-\lambda)^2 (\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0, \quad \lambda_{1/2} = 2, \quad \lambda_{3/4} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 3; -1$$

EV zu $\lambda_{1/2} = 2$:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

EV: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

EV: $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_4 = -1$:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

EV: $D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$