

Aufgabe 16.8

Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} !$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -3 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \left((1-\lambda)(5-\lambda) + 3 \right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_{2/3} = 3 \pm \sqrt{9-8} = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$

EV zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

EV $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

EV $D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_3 = 4$:

$$\begin{array}{ccc} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

EV $E \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$