Aufgabe 16.6

Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^2$!

Hinweis: Analog zur Betragsdefinition für komplexe Zahlen $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$ muss das Skalarprodukt komplexer Vektoren durch $\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum x_i\overline{y_i}$ definiert werden. Für die Norm eines komplexen Vektors gilt daher $\|\vec{z}\|=\sqrt{\sum z_i\overline{z_i}}$.

Lösung:

Eigenwerte: $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(8-\lambda)(2-\lambda)+18=\lambda^2-10\lambda+34=0$

$\Longrightarrow\quad \lambda_{1/2}=5\pm\sqrt{25-34}=5\pm 3\mathrm{i}$

Eigenvektor zu $\lambda_1=5+3\mathrm{i}$:

$3-3\mathrm{i}$	3
-6	$-3-3\mathrm{i}$
$1-\mathrm{i}$	1
-2	$-1-\mathrm{i}$
$1-\mathrm{i}$	1
0	0

$(1-\mathrm{i})x+y=0$
$y=(-1+\mathrm{i})x$
$x=C, y=(-1+\mathrm{i})C$

EV $C\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_2=5-3\mathrm{i}$:

$3+3\mathrm{i}$	3
-6	$-3+3\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}$	1
-2	$-1+\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}$	1
0	0

$(1+\mathrm{i})x+y=0$
$y=(-1-\mathrm{i})x$
$x=D, y=(-1-\mathrm{i})D$

EV $D\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$

Zum Normieren (auf Länge 1 bringen) wird ein Vektor durch seine Norm geteilt: $\left\|\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\|=1$.

Es gilt $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1\cdot 1+(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=\sqrt{1+(-1)^2-\mathrm{i}^2}=\sqrt{3}$, ebenso offensichtlich $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\right\|=\sqrt{3}$, damit ist $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1\pm\mathrm{i} \end{pmatrix}$ normierter EV zum EW $-1\pm\mathrm{i}$.

Ferner ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}\cdot\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}}=1+(-1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})=1+1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=1-2\mathrm{i}\neq 0$, die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind nicht orthogonal.

(Der Satz über die Orthogonalität zu verschiedenen Eigenwerten gehöriger Eigenvektoren gilt nur für hermitesche Matrizen: $\boldsymbol{A}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}}$. Eine reelle Matrix ist hermitesch, wenn sie symmetrisch ist, das íst hier nicht der Fall.)