Aufgabe 16.4

Sei $\vec{x}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix $\boldsymbol{A}$, ferner sei $\boldsymbol{E}$ wie üblich die Einheitsmatrix.

a) Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\vec{x}$!

b) Geben Sie für die Matrizen $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ aus den Aufgaben 16.1 und 16.3 die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ an!

Lösung:

$\boldsymbol{A}\vec{x}=\lambda\vec{x}$

a) $$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\vec{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\vec{x}-\boldsymbol{A}\vec{x}-2\vec{x}=\boldsymbol{A}\lambda\vec{x}-\lambda\vec{x}-2\vec{x}=\lambda\boldsymbol{A}\vec{x}-\lambda\vec{x}-2\vec{x}=\lambda\cdot\lambda\vec{x}-\lambda\vec{x}-2\vec{x}$$
$$=(\lambda^2-\lambda-2)\vec{x}$$

b) $\widetilde{\boldsymbol{A}}\vec{x}=(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\vec{x}=(\lambda^2-\lambda-2)\vec{x}$

Also sind alle Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ auch solche von $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, die zugehörigen Eigenwerte sind $\widetilde{\lambda}=\lambda^2-\lambda-2$. Da die Matrizen $\boldsymbol{A}_1$ und $\boldsymbol{A}_2$ zwei bzw. drei linear unabhängige Eigenvektoren haben und die Matrizen $\widetilde{\boldsymbol{A}}_1$ und $\widetilde{\boldsymbol{A}}_2$ nicht mehr als zwei bzw. drei linear unabhängige Eigenvektoren haben können, sind deren Eigenwerte und Eigenvektoren damit vollständig bekannt.

zu $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$: $\lambda_1=2,\ \vec{x}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda_2=-1,\ \vec{x}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\widetilde{\boldsymbol{A}}_1=\boldsymbol{A}_1^2-\boldsymbol{A}_1-2\boldsymbol{E}$: $\widetilde{\lambda}_1=\widetilde{\lambda}_2=0$ mit EV $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

0 doppelter Eigenwert mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren

(vgl. Aufgabe 16.1e): Setzt man eine Matrix $\boldsymbol{A}$ in ihr charakteristisches Polynom ein, so erhält man die Nullmatrix. Es ist also $\widetilde{\boldsymbol{A}}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix kann nur 0 als Eigenwert haben, wegen $\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\vec{x}=\vec{0}=0\vec{x}$ sind alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ Eigenvektoren. Die angegebenen beiden Eigenvektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$, jede Linearkombination, d.h. jeder Vektor des $\mathbb{R}^2$, ist Eigenvektor.)

zu $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$: $\lambda_1=0,\ \vec{x}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_2=1,\ \vec{x}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda_3=9,\ \vec{x}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\widetilde{\boldsymbol{A}}_2=\boldsymbol{A}_2^2-\boldsymbol{A}_2-2\boldsymbol{E}$: $\widetilde{\lambda}_1=-2,\ \vec{x}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{\lambda}_2=0,\ \vec{x}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{\lambda}_3=70,\ \vec{x}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$