Aufgabe 16.2

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$ und führen Sie die Diagonalisierung mithilfe der Matrix aus den Eigenvektoren rechnerisch aus!

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 12 \\ -8 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)(-9-\lambda)+96 = -99-2\lambda+\lambda^2+96 = \lambda^2-2\lambda-3 = 0$$

Eigenwerte $\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

EV zu $\lambda_1 = 3$: $\begin{array}{rr} 8 & 12 \\ -8 & -12 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$ EV $A\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2 = -1$: $\begin{array}{rr} 12 & 12 \\ -8 & -8 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ EV $B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrix aus den linear unabhängigen Eigenvektoren: $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Im Falle der Invertierbarkeit gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (s. Aufg. 6.175a)). Also ist $\boldsymbol{V}^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$