Aufgabe 15.29

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

a) Diskutieren Sie den Verlauf der Kurve und skizzieren Sie sie!
Hinweis: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$

Im Folgenden soll nur der Abschnitt der Kurve von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ betrachtet werden:

b) Bestimmen Sie das begleitende Dreibein!
Hinweis: $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}, \quad \sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$

c) Bestimmen Sie den Krümmungsradius!

d) Ermitteln Sie die Länge des Kurvenabschnitts!

e) Ermitteln Sie den Inhalt der von dem Kurvenabschnitt und der x–Achse begrenzten Fläche!

Lösung:

a) Die Kurve liegt in der x-y-Ebene. Die Funktion $x(t) = t - \sin t$ wächst wegen $x'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ monoton von $-\infty$ nach $+\infty$, sie ist sogar überall streng monoton wachsend, da die Ableitung nur an isolierten Stellen gleich 0 wird. Weiterhin ist wegen $-1 \leq \cos t \leq 1$ das Intervall $[0,2]$ Wertebereich von $y(t)$. Also kann die Kurve in der x-y-Ebene als Funktion $y(x)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Wertebereich $[0,2]$ dargestellt werden.

Betrachtung der Funktion $y(x)$:

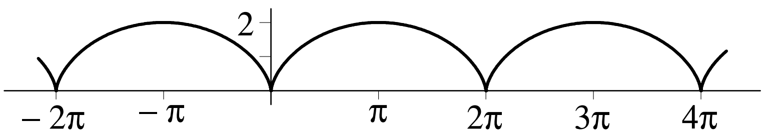
Nullstellen: $y(t) = 1 - \cos t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 2l\pi,\ l$ ganz $\Leftrightarrow\; x = 2l\pi,\ l$ ganz

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

Da der Nenner nichtnegativ ist, hat $y'(x)$ das gleiche Vorzeichen wie $\sin t$. $y'(x) = 0$ kann nur für $t = k\pi$ gelten. Für $k = 2l + 1$ ist der Nenner gleich 2, so dass eine Nullstelle vorliegt, für $k = 2l$ hingegen gilt nach der l'Hospitalschen Regel $\lim\limits_{t \to k\pi \pm 0} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim\limits_{t \to k\pi \pm 0} \frac{\cos t}{\sin t} = \pm\infty$, d.h. die Funktion $y(x)$ hat in ihren Nullstellen $x = 2l\pi$ einen Knick mit senkrechter Tangente. In den übrigen Punkten gilt

$$y'(x) \begin{cases} > 0, & 2l\pi < x < (2l+1)\pi \quad \text{monoton wachsend} \\ = 0, & x = (2l+1)\pi \\ < 0, & (2l+1)\pi < x < (2l+2)\pi \quad \text{monoton fallend} \end{cases} \Rightarrow \text{Maximum } y(x) = 2,$$

$$y''(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{(1 - \cos t)\cos t - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^3} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2} < 0 \implies \text{überall konkav.}$$



Die Kurve wird als Zykloide bezeichnet.

b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin^2\frac{t}{2} \\ 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sin\frac{t}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = 2|\sin\frac{t}{2}|\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}} = 2|\sin\frac{t}{2}| = 2\sin\frac{t}{2} \text{ wegen } 0 \le \frac{t}{2} \le \pi \text{, also}$$

Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}(t) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

Hauptnormalenrichtung $\dot{\vec{T}}(t) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|\dot{\vec{T}}(t)\| = \frac{1}{2}$,

Hauptnormaleneinheitsvektor $\vec{N}(t) = \dfrac{\dot{\vec{T}}(t)}{\|\dot{\vec{T}}(t)\|} = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

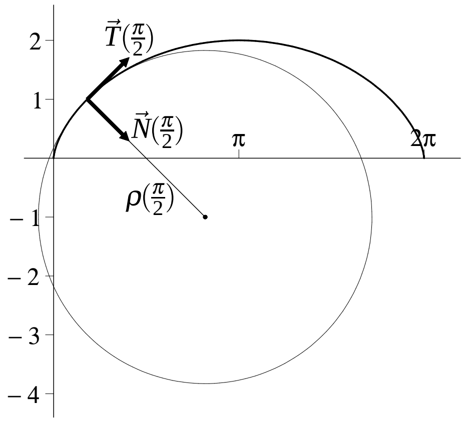
Binormaleneinheitsvektor $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(Das ist ohnehin offensichtlich, da die Kurve in der x-y-Ebene verläuft.).

Begleitendes Dreibein:

$\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\} =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$



c) Krümmungsradius $\rho(t) = \dfrac{\|\dot{\vec{x}}(t)|}{\|\dot{\vec{T}}(t)\|} = \dfrac{2\sin\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{4\sin\frac{t}{2}}}$

d) Bogenlänge $s = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\frac{t}{2} = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4(-1-1) = \underline{\underline{8}}$$

e) $x(0) = 0,\ x(2\pi) = 2\pi$,

$$A = \int_{x=0}^{x=2\pi} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{t=2\pi} y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} y\dot{x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= t - 2\sin t + \frac{t+\sin t\cos t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{2\pi}{2} = \underline{\underline{3\pi}}$$