Aufgabe 15.28

$y=y(x)$ sei eine Kurve in der Ebene mit der Parameterdarstellung $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$. Leiten Sie aus der Formel $\kappa=\dfrac{\|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}\|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3}$ für die Krümmung die Formel $\kappa=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ her!

Lösung:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\0\end{pmatrix},\quad \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{y}(t)\\0\end{pmatrix},\quad \ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}\ddot{x}(t)\\\ddot{y}(t)\\0\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\dot{x}&\dot{y}&0\\\ddot{x}&\ddot{y}&0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}\end{pmatrix},\quad \|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}\|=|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|\quad\Longrightarrow\quad \kappa=\frac{\|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}\|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^3}$$

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\quad y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\frac{1}{\dot{x}}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\right|}{\left(1+\dfrac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\right|}{\left(\dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\dfrac{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}{|\dot{x}|^3}}{\dfrac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}|^3}}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^3}=\kappa,\ \text{w.z.b.w.}$$