Aufgabe 15.27

Sei $a>0$. Zeigen Sie, dass in einem beliebigen Punkt der Astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ der Krümmungsradius gleich $3\sqrt[3]{a|xy|}$ ist!

Hinweis: Parameterdarstellung der Astroide: $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$

Lösung:

Die Krümmung einer Kurve $\vec{x}(t)$ berechnet sich im $\mathbb{R}^3$ zu $\kappa=\dfrac{\|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}\|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3}$. Setzt man die dritte Komponente gleich 0, so reduziert sich das für Kurven im $\mathbb{R}^2$ auf $\kappa=\dfrac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^3}$.

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} a\cos^3 t \\ a\sin^3 t \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} -3a\cos^2 t\sin t \\ 3a\sin^2 t\cos t \end{pmatrix},\quad \ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} 6a\cos t\sin^2 t-3a\cos^3 t \\ 6a\sin t\cos^2 t-3a\sin^3 t \end{pmatrix}=3a\begin{pmatrix} \cos t\,(2\sin^2 t-\cos^2 t) \\ \sin t\,(2\cos^2 t-\sin^2 t) \end{pmatrix}$$

$$\kappa(t)=\frac{|-9a^2\cos^2 t\sin^2 t(2\cos^2 t-\sin^2 t)-9a^2\sin^2 t\cos^2 t(2\sin^2 t-\cos^2 t)|}{\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}^3}$$

$$=\frac{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}{\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}^3}=\frac{1}{\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}}=\frac{1}{3a\,|\cos t\,\sin t|}$$

Krümmungsradius $R(t)=\dfrac{1}{\kappa(t)}=3a\,|\cos t\,\sin t|=3\sqrt[3]{a\,|a\cos^3 t|\,|a\sin^3 t|}=3\sqrt[3]{a|xy|}$