Aufgabe 15.26

Bestimmen Sie ausgehend von einer Parameterdarstellung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ den Krümmungsradius in ihren Scheitelpunkten!

Lösung:

Um den Satz des Pythagoras $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ nutzen zu können, wird $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ gesetzt. Dann gilt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Parameterdarstellung der Ellipse ist somit $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix}$. Die Scheitelpunkte $(\pm a,0)$ und $(0,\pm b)$ erreicht man dabei mit $t=0$ und π bzw. mit $t=\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$.

Für $0\le t<2\pi$ wird die Ellipse einmal voll durchlaufen. Zu beachten ist aber, dass der Parameter t nur in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen mit dem bei Polarkoordinaten verwendeten Winkel gegenüber der positiven s-Achse übereinstimmt.

Die Krümmung einer Kurve $\vec{x}(t)$ berechnet sich im $\mathbb{R}^3$ zu $\kappa=\frac{\|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}\|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3}$. Setzt man die dritte Komponente gleich 0, so reduziert sich das für Kurven im $\mathbb{R}^2$ auf $\kappa=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^3}$.

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix},\quad \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} -a\sin t\\ b\cos t\end{pmatrix},\quad \ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} -a\cos t\\ -b\sin t\end{pmatrix}$$

$$\kappa(t)=\frac{|(-a\sin t)(-b\sin t)-b\cos t(-a\cos t)|}{\sqrt{(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2}^3}=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}^3}$$

($a,b>0$ vorausgesetzt, was man vernünftigerweise tun kann)

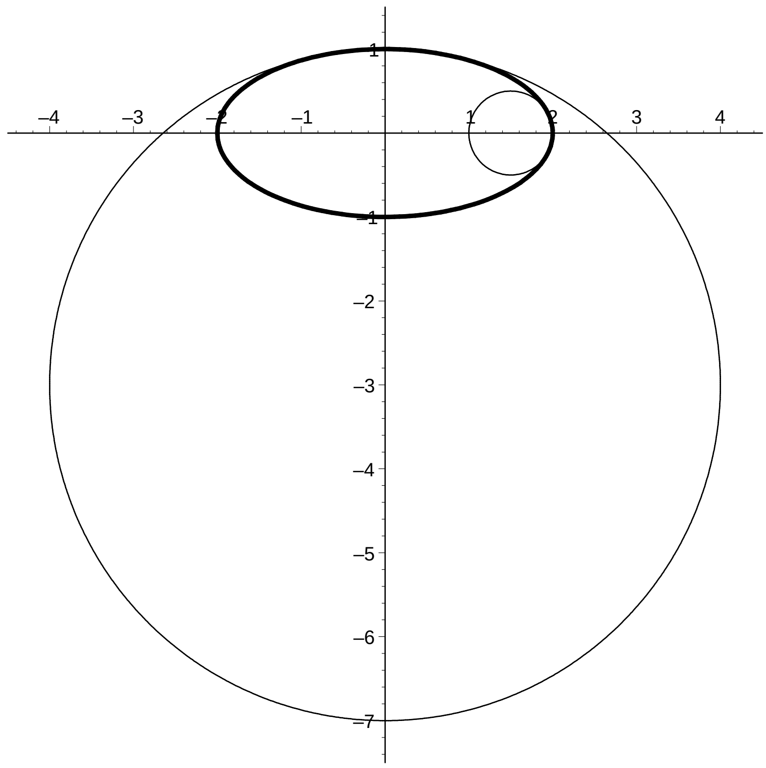
Der Krümmungsradius ist somit $R(t)=\frac{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}^3}{ab}$.

In den Scheitelpunkten erhält man:

$(\pm a,0)$, $t=0$ und $t=\pi$: $\quad R(0)=R(\pi)=\frac{\sqrt{b^2}^3}{ab}=\frac{b^2}{a}$,

$(0,\pm b)$, $t=\frac{\pi}{2}$ und $t=\frac{3\pi}{2}$: $\quad R\left(\frac{\pi}{2}\right)=R\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{a^2}^3}{ab}=\frac{a^2}{b}$.

Ein Beispiel ist umseitig dargestellt.



Ellipse $\dfrac{x^2}{2^2}+y^2=1,\quad \vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$

mit Krümmungskreisen im Scheitelpunkt $(2,0)$ (Krümmungsradius $\dfrac{1}{2}$) und
im Scheitelpunkt $(0,1)$ (Krümmungradius 4)