Aufgabe 15.25

Eine Schraubenlinie sei durch die Parameterdarstellung $x(t)=2\cos t,\ y(t)=2\sin t,\ z(t)=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie die Länge des Kurvensegmentes $t\in[0,1]$!

b) Ermitteln Sie den Krümmungsradius im Punkt $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$!

Lösung:

a) $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\cos t\\ 2\sin t\\ \frac{4}{3}t^{3/2}\end{pmatrix},\quad \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-2\sin t\\ 2\cos t\\ 2\sqrt{t}\end{pmatrix}$

$$l=\int\limits_0^1\|\dot{x}(t)\|\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+4t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 2\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=2\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\underline{\underline{\frac{4}{3}(\sqrt{8}-1)\approx 2{,}438}}$$

b) $\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-2\cos t\\ -2\sin t\\ \frac{1}{\sqrt{t}}\end{pmatrix}$

$$(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})\,(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2\sin t & 2\cos t & 2\sqrt{t}\\ -2\cos t & -2\sin t & \frac{1}{\sqrt{t}}\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{t}}\cos t+4\sqrt{t}\sin t\\ -4\sqrt{t}\cos t+\frac{2}{\sqrt{t}}\sin t\\ 4\sin^2 t+4\cos^2 t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{t}}\cos t+4\sqrt{t}\sin t\\ \frac{2}{\sqrt{t}}\sin t-4\sqrt{t}\cos t\\ 4\end{pmatrix}$$

$$\left\|(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\|=\sqrt{\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{2\pi}\right)^2+\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\sqrt{2\pi}\right)^2+16}=2\sqrt{\frac{4}{\pi}+\pi+4}$$

$$\left\|\dot{\vec{x}}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\|=\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{4}+4\cos^2\frac{\pi}{4}+\pi}=\sqrt{4+\pi}$$

Krümmungsradius: $r=\frac{1}{\kappa}=\frac{\left\|\dot{\vec{x}}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\|^3}{\left\|(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\|}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{(4+\pi)^3}{4\left(\frac{4}{\pi}+\pi+4\right)}}\approx 3{,}29}}$