Aufgabe 15.24

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 6t^2 \\ 24t \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie

a) die Länge des Kurvenstücks zwischen dem Koordinatenursprung und $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$,

b) die Tangente an die Kurve im Koordinatenursprung (Was ist das für eine Gerade?),

c) die Schmiegebene der Kurve im Koordinatenursprung und

d) den Krümmungskreis der Kurve im Koordinatenursprung!

Lösung:

a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 6t^2 \\ 24t \end{pmatrix}, \ \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 12t \\ 24 \end{pmatrix},$

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \sqrt{9t^4+144t^2+576} = \sqrt{9(t^4+16t^2+64)} = \sqrt{9(t^2+8)^2} = 3(t^2+8),$$

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}, \ l = \int_0^1 \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3(t^2+8)\,\mathrm{d}t = t^3+24t\Big|_0^1 = \underline{\underline{25}}$$

b) $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Tangentenrichtung: $\dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$, normiert $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Tangente: $\underline{\underline{\vec{x}(t) = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$, d.h. die z–Achse

c) Tangenteneinheitsvektor: $\vec{T}(t) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \dfrac{1}{t^2+8}\begin{pmatrix} t^2 \\ 4t \\ 8 \end{pmatrix}$,

Hauptnormalenrichtung: $\dot{\vec{T}}(t) = \dfrac{1}{(t^2+8)^2}\begin{pmatrix} 2t(t^2+8)-2t\cdot t^2 \\ 4(t^2+8)-4t\cdot 2t \\ -8\cdot 2t \end{pmatrix}$,

$\vec{T}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \dot{\vec{T}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{N}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Binormaleneinheitsvektor (Stellungsvektor der Schmiegebene):

$$\vec{B}(0) = \vec{T}(0)\times\vec{N}(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Schmiegebene also $\underline{\underline{x=0}}$ (y-z-Ebene)

d) Krümmung: $\kappa(0) = \dfrac{\|\dot{\vec{T}}(0)\|}{\|\dot{\vec{x}}(0)\|} = \dfrac{1/2}{24} = \dfrac{1}{48}$, Krümmungsradius: $\rho(0) = \dfrac{1}{\kappa(0)} = 48$, Krümmungsmittelpunkt: $\vec{x}(0)+\rho(0)\vec{N}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 48\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\48\\0\end{pmatrix}$

Beim Krümmungskreis handelt es sich also um den Kreis mit dem Radius 48 um den Punkt $\begin{pmatrix}0\\48\\0\end{pmatrix}$ in der Ebene $x=0$, d.h. den Kreis $\underline{\underline{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}0\\48+48\cos t\\48\sin t\end{pmatrix}, \quad -\pi \leq t < \pi}}$ bzw. $\underline{\underline{x=0,\ (y-48)^2+z^2=48^2}}$.