

Aufgabe 15.23

Ermitteln Sie für $t=1$ die Gleichungen der Tangente sowie der Normal- und der Schmiegeebene an die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$!

Lösung:

$$\text{Tangente } \vec{x}(1) + u\dot{\vec{x}}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{Tangenteneinheitsvektor } \vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenrichtung } \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}^3} \begin{pmatrix} -4t-18t^3 \\ 2-18t^4 \\ 6t+12t^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}^3} \begin{pmatrix} -22 \\ -16 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Für $t=1$ ergeben sich als nicht normierter Tangenten-, Normalen- und Binormalenvektor

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} -42 \\ 42 \\ -14 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{Schmiegeebene: } 3x-3y+z=1, \\ \text{Normalebene: } x+2y+3z=6, \\ \text{rektif. Ebene: } 11x+8y-9z=10. \end{array}$$