## Aufgabe 15.22

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t \\ 2-\sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie das begleitende Dreibein im Punkt $\vec{x}(t)$ !
b) Ermitteln Sie für den Punkt $\vec{x}(t)$ die Schmiegebene, die Krümmung, den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt!
c) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{x}(t)$ ?

## Lösung:

a) $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t \\ 2-\sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ -\sqrt{2}\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\vec{x}}(t)\|=\sqrt{2\cos^2 t+2\cos^2 t+4\sin^2 t}=2,$

Tangenteneinheitsvektor: $\vec{T}(t) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},$

$$\dot{\vec{T}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\vec{T}}(t)\| = \sqrt{\frac{1}{2}\sin^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t+\cos^2 t} = 1,$$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $\vec{N}(t) = \dfrac{\dot{\vec{T}}(t)}{\|\dot{\vec{T}}(t)\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix},$

Binormaleneinheitsvektor: $\vec{B}(t) = \vec{T}(t)\times\vec{N}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & -\sin t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & -\cos t \end{vmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 t \\ \frac{1}{2}\cos t\sin t-\frac{1}{2}\sin t\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

begleitendes Dreibein $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) Schmiegebene: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t \\ 2-\sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}\right) = 0,$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x-\sin t+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\sqrt{2}+\sin t=0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y=\sqrt{2},\ \underline{\underline{x+y=2}},$$

Krümmung: $\kappa(t) = \dfrac{\|\dot{\vec{T}}(t)\|}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}},\quad$ Krümmungsradius: $\rho(t) = \dfrac{1}{\kappa(t)} = \underline{\underline{2}},$

Krümmungsmittelpunkt: $\vec{x}(t)+\rho(t)\vec{N}(t)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\sin t\\ 2-\sqrt{2}\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0\end{pmatrix}}}$

c) Da der Krümmungsradius konstant ist und zu jedem Kurvenpunkt derselbe Krümmungsmittelpunkt gehört, ergibt sich für jeden Kurvenpunkt derselbe Krümmungskreis. Die Kurve $\vec{x}(t)$ fällt also mit ihrem Krümmungskreis zusammen. Es handelt sich um den Kreis mit Radius 2 um den Punkt $(0,2,0)$ in der Schmiegebene $x+y=2$.