Aufgabe 15.21

Geben Sie eine natürliche Parametrisierung, das ist eine Parameterdarstellung, bei der der Parameter die Bogenlänge ist, des Kreises an, der beim Schnitt der Einheitskugel des dreidimensionalen Raumes mit der Ebene $y=x$ entsteht und bestimmen Sie sein begleitendes Dreibein!

Lösung:

Die Ebene $y=x$! enthält den Koordinatenursprung, so dass der Mittelpunkt des Schnittkreises der Koordinatenursprung ist.

Einsetzen von $x=y$ in die Gleichung der Einheitskugel $x^2+y^2+z^2=1$ liefert $2x^2+z^2=1$. (Die Projektion des Schnittkreises in die x-z-Ebene ist eine Ellipse.) Deshalb kann man die Parameterdarstellung $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ z=\sin t$ verwenden.

Tatsächlich gilt für $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ sowohl $x(t)=y(t)$ als auch $(x(t))^2+(y(t))^2+(z(t))^2=1$, so dass durch diese Vektorfunktion tatsächlich der Schnittkreis beschrieben wird.

Offensichtlich wird ein voller Durchlauf für $0\le t<2\pi$ erreicht, für die von 0 bis t durchlaufene Bogenlänge gilt

$$s(t)=\int_0^t\|\dot{\vec{x}}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\sqrt{(\dot{x}(\tau))^2+(\dot{y}(\tau))^2+(\dot{z}(\tau))^2}\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\sqrt{\frac{1}{2}\sin^2\tau+\frac{1}{2}\sin^2\tau+\cos^2\tau}\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\mathrm{d}\tau=t,$$

so dass eine natürliche Parametrisierung vorliegt: $\vec{x}(s)=\begin{pmatrix}x(s)\\y(s)\\z(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\\ \sin s\end{pmatrix}$.

Für natürliche Parametrisierung $\vec{x}(s)$ vereinfachen sich die z.B. bei Aufgabe 15.19 angegebenen Formeln für die Vektoren des begleitenden Dreibeins und die Krümmung zu

Tangenteneinheitsvektor: $\vec{T}(s)=\dot{\vec{x}}(s)$ (Wegen $\dot{s}(t)=\|\dot{\vec{x}}(t)\|$ (s. oben, vgl. auch z.B. Aufgabe 15.11) gilt nämlich für $s=t$ die Beziehung $\|\dot{\vec{x}}(s)\|=1$.)

Krümmung: $\kappa(s)=\|\ddot{\vec{x}}(s)\|$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $\vec{N}(s)=\dfrac{\dot{\vec{T}}(s)}{\|\dot{\vec{T}}(s)\|}=\dfrac{\ddot{\vec{x}}(s)}{\|\ddot{\vec{x}}(s)\|}=\dfrac{\dot{\vec{T}}(s)}{\kappa(s)}$

Binormaleneinheitsvektor: $\vec{B}(s)=\vec{T}(s)\times\vec{N}(s)$

Für den betrachteten Schnittkreis ergibt sich

$$\vec{T}(s)=\dot{\vec{x}}(s)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\\ \cos s\end{pmatrix},$$

$\ddot{\vec{x}}(s)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\\ -\sin s\end{pmatrix}$, $\kappa(s)=\|\ddot{\vec{x}}(s)\|=1$ (wie nicht anders zu erwarten, da Kreis mit Radius 1),

$$\vec{N}(s) = \frac{\ddot{\vec{x}}(s)}{\kappa(s)} = \ddot{\vec{x}}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s \\ -\sin s \end{pmatrix},$$

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s & \cos s \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s & -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s & -\sin s \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Binormalenvektor ist Stellungsvektor der Schmiegebene, deren Gleichung somit $x - y = 0$ lautet. Das muss so sein, da der betrachtete Kreis ja sogar komplett in dieser Ebene liegt.