Aufgabe 15.20

Bestimmen Sie das begleitende Dreibein, die Schmiegebene und den Krümmungskreis an die Schraubenlinie $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\cos t\\ 2\sin t\\ t\end{pmatrix}$ im Punkt $(2,0,0)$!

Lösung:

Offensichtlich erhält man den Punkt $(2,0,0)$ für den Parameter $t=0$.

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-2\sin t\\ 2\cos t\\ 1\end{pmatrix}, \quad \|\dot{\vec{x}}(t)\|=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+1}=\sqrt{5}$$

Tangenteneinheitsvektor: $\vec{T}(t)=\dfrac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\sin t\\ 2\cos t\\ 1\end{pmatrix}, \quad \vec{T}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{T}}(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\cos t\\ -2\sin t\\ 0\end{pmatrix}, \quad \|\dot{\vec{T}}(t)\|=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $\vec{N}(t)=\dfrac{\dot{\vec{T}}(t)}{\|\dot{\vec{T}}(t)\|}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\cos t\\ -2\sin t\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix}, \quad \vec{N}(0)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

Binormaleneinheitsvektor: $\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\sin t\\ 2\cos t\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2\sin t & 2\cos t & 1\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\\ 2\end{pmatrix}, \quad \vec{B}(0)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

Schmigebene: $\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-2\\ y-0\\ z-0\end{pmatrix}, \quad y-2z=0$

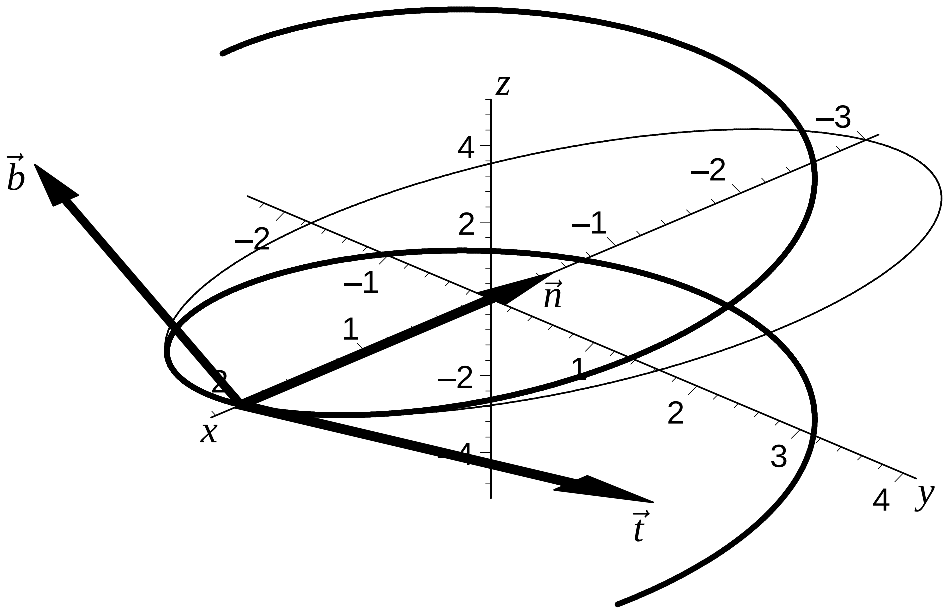
Krümmung: $\kappa(0)=\dfrac{\|\dot{\vec{T}}(0)\|}{\|\dot{\vec{x}}(0)\|}=\dfrac{\left\|\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right\|}=\dfrac{2}{5}, \quad$ Krümmungsradius: $\rho(0)=\dfrac{1}{\kappa(0)}=\dfrac{5}{2}$

Krümmungsmittelpunkt: $\vec{x}(0)+\rho(0)\,\vec{N}(0)=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\dfrac{5}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

Der Krümmungskreis liegt in der Schmiegebene. Also handelt es sich um den Kreis mit Radius $5/2$ um den Punkt $(-1/2,0,0)$ in der Ebene $y-2z=0$.

In der Schmiegebene sind $-\vec{N}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ und $\vec{T}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ orthogonale Einheitsvektoren.

Deshalb ist $\vec{X}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\cos\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\sin\varphi \, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos\varphi \\ \sqrt{5}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{5}}{2}\sin\varphi \end{pmatrix}$ eine Gleichung des Krümmungskreises in Parameterform.



In der Abbildung sind die Richtungen des begleitenden Dreibeins durch nicht normierte Vektoren dargestellt, die mit den entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet sind.