Aufgabe 15.19

Geben Sie eine Parameterdarstellung des Kreises mit dem Radius 2 um den Punkt $(1,2)$ in der x-y-Ebene an, bestimmen Sie sein begleitendes Dreibein (Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalen-Einheitsvektor), ermitteln Sie seine Krümmung und den Krümmungsradius!

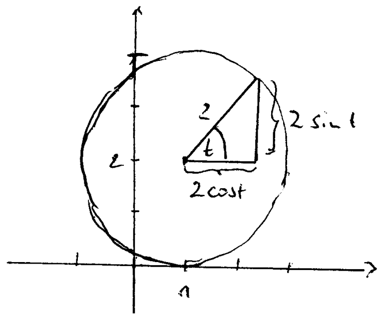
Lösung:

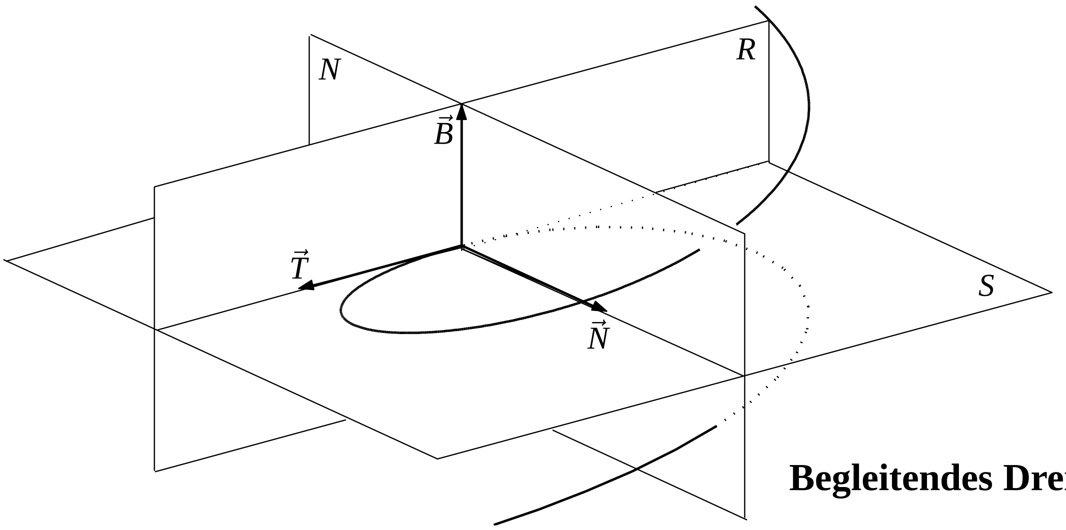
Betrachtung im $\mathbb{R}^3$ (wegen begleitendem Dreibein): Kurve: $\vec{x}=\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$, $a\leq t\leq b$

Kreis in x-y-Ebene allgemein: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x_0+r\cos t\\y_0+r\sin t\\z(t)\end{pmatrix}$, $0\leq t<2\pi$

Kreis laut Aufgabenstellung: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1+2\cos t\\2+2\sin t\\0\end{pmatrix}$, $0\leq t<2\pi$

Tangentenrichtung: $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-2\sin t\\2\cos t\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\\0\end{pmatrix}$





Begleitendes Dreibein

$\vec{T}$: Tangentenvektor, $\vec{N}$: Hauptnormalenvektor, $\vec{B}$: Binormalenvektor

S: Schmiegebene: Grenzlage der Ebene, die durch den Punkt P und zwei benachbarte Punkte P_1 und P_2 geht, bei $P_1\longrightarrow P$ und $P_2\longrightarrow P$,
enthält $\vec{T}$ und $\vec{N}$, Stellungsvektor ist $\vec{B}$

N: Normalebene: enthält $\vec{N}$ und $\vec{B}$, Stellungsvektor ist $\vec{T}$

R: rektifizierende Ebene: enthält $\vec{T}$ und $\vec{B}$, Stellungsvektor ist $\vec{N}$

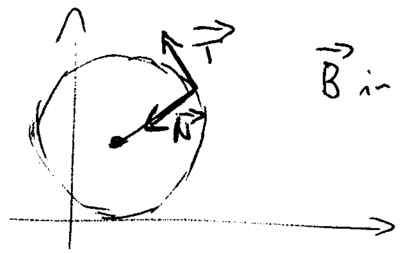
Tangenteneinheitsvektor: $\vec{T}(t) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \dfrac{2\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}}{2\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $\vec{N}(t) = \dfrac{\dot{\vec{T}}(t)}{\|\dot{\vec{T}}(t)\|} = \dfrac{\begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix}}{2\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} = \begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix}$

Binormaleneinheitsvektor: $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sin t & \cos t & 0\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

(wie nicht anders zu erwarten war)

Begleitendes Dreibein: $(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$



$\vec{B}$ in z-Richtung

Krümmung: Änderungsrate der Tangente

vgl. Ableitung: Verhältnis der absoluten Änderungen von 2 Größen

Krümmung $=$ $\lim \dfrac{\text{Änderung der Richtung der Tangente}}{\text{Länge des entsprechenden Kurvenstücks}}$

$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \ldots + \dot{x}_n^2}\, dt = \|\dot{\vec{x}}(t)\|\, dt, \quad \dot{s}(t) = \dfrac{ds}{dt} = \|\dot{\vec{x}}(t)\|$

Krümmung $\kappa = \lim \dfrac{\|\Delta T\|}{|\Delta s|} = \dfrac{\|\dot{\vec{T}}\|}{|\dot{s}|} = \dfrac{\|\dot{\vec{T}}\|}{\|\dot{\vec{x}}\|} = \dfrac{\|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\|}{\|\dot{\vec{x}}\|^3}$

Krümmungskreis: Grenzlage des Kreises durch Berührungspunkt (fest) und 2 benachbarte Punkte (liegt in Schmiegebene),
berührt die Kurve im Berührungspunkt so, dass Ableitungen bis zur 2. Ableitung übereinstimmen

Krümmungsradius: Radius des Krümmungskreises $= \dfrac{1}{\text{Krümmung}}$

Konkret: $\kappa = \dfrac{\|\dot{\vec{T}}\|}{\|\dot{\vec{x}}\|} = \dfrac{\left\|\begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix}\right\|}{2\left\|\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{1}{2},$

Krümmungsradius 2 (wie nicht anders zu erwarten war, da die Kurve ein Kreis mit Radius 2 ist)