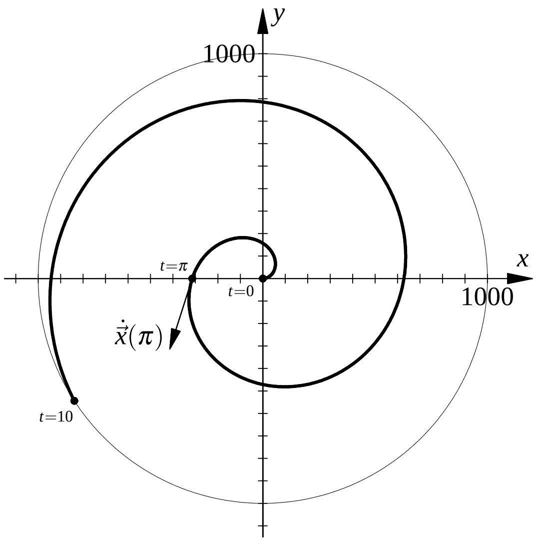
Aufgabe 15.17

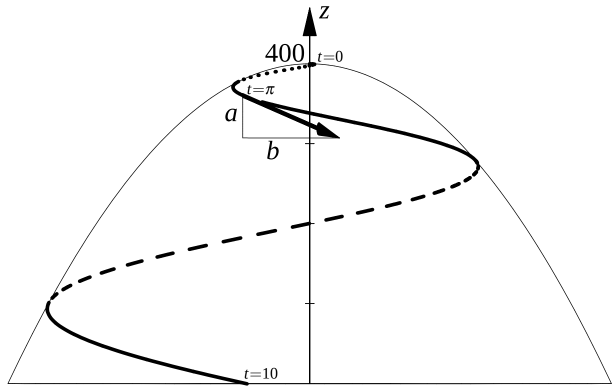
In einem Gelände der Höhe $h(x,y)=400-\dfrac{x^2+y^2}{2500}$ wird vom Berggipfel bei $(x,y)=(0,0)$ zum auf Höhenniveau 0 befindlichen Meer längs $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\,t\,\cos t\\100\,t\,\sin t\end{pmatrix}$, $t\geq 0$, eine Straße gebaut.

a) Stellen Sie die Straße auf einer Landkarte grafisch dar!
b) In welchem Punkt erreicht die Straße das Meer?
c) In welche Richtung zeigt die Kartendarstellung der Straße in $(x,y)=(-100\,\pi,0)$?
d) Bestimmen Sie den Anstieg der Straße an dieser Stelle!

Lösung:

a)





zu d): Gefälle bei $t=\pi$: $\dfrac{a}{b}\approx 7.62\,\%$

Die linke Abbildung enthält auch Angaben zu den Aufgabenteilen b) und c).

b) $h(x,y)=400-\dfrac{x^2+y^2}{2500}=0,\quad \dfrac{x^2+y^2}{2500}=400,\quad x^2+y^2=1\,000\,000$

$x^2(t)+y^2(t)=10\,000t^2\cos^2 t+10\,000t^2\sin^2 t=10\,000t^2=1\,000\,000,\quad t^2=100,\quad t=10$

Also erreicht die Straße in $(x(10),y(10))=(1000\cos 10,1000\sin 10)\approx(-839.07,-544.02)$ das Meer.

c) $\vec{x}(t)=100\begin{pmatrix}t\,\cos t\\t\,\sin t\end{pmatrix}=100\begin{pmatrix}-\pi\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&t\,\cos t=-\pi && \Longrightarrow\; k\pi\cos k\pi=k\pi(-1)^k=-\pi,\quad k=1,\quad t=\pi\\
&t\,\sin t=\;\;0 \quad\Longrightarrow\; t=k\pi &&
\end{aligned}$$

$\dot{\vec{x}}(t)=100\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t\\\sin t+t\cos t\end{pmatrix},\quad \dot{\vec{x}}(\pi)=100\begin{pmatrix}-1\\-\pi\end{pmatrix}$

Also zeigt die Kartendarstellung der Straße in $(-100\pi,0)$ in Richtung $\vec{l}=\begin{pmatrix}-1\\-\pi\end{pmatrix}$.

d) $\dfrac{\partial h(x,y)}{\partial\vec{l}}=\dfrac{1}{\left|\vec{l}\right|}\nabla h(x,y)\cdot\vec{l}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\begin{pmatrix}-x/1250\\-y/1250\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-\pi\end{pmatrix}=\dfrac{x+\pi y}{1250\sqrt{1+\pi^2}}$

$\dfrac{\partial h(-100\pi,0)}{\partial\vec{l}}=\dfrac{-100\pi}{1250\sqrt{1+\pi^2}}\approx-0.0762$, die Straße hat ein Gefälle von $7.62\,\%$.