Aufgabe 15.16

Zwei Körper bewegen sich für $t \geq 0$ gemäß $\vec{s}_\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{s}_\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie jeweils die Entfernung vom Koordinatenursprung, den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor sowie die Normalenrichtung in Abhängigkeit von t !

b) Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven! Zeichnen Sie jeweils für $t = \pi$ den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvekor ein!

Lösung:

a) **Körper A:**

Entfernung vom Koordinatenursprung: $\|\vec{s}_\mathrm{A}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$,
d.h. Bewegung längs Einheitskreis

Geschwindigkeit: $\vec{v}_\mathrm{A}(t) = \dot{\vec{s}}_\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Beschleunigung: $\vec{a}_\mathrm{A}(t) = \ddot{\vec{s}}_\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

Normalenrichtung orthogonal zur Tangentenrichtung, d.h. zur Geschwindigkeit: $\begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

(Da der Betrag des Geschwindigkeitsvektors konstant ist, zeigt der Beschleunigungsvektor in Normalenrichtung, vgl. Aufgabe 15.10.)

Körper B:

Entfernung vom Koordinatenursprung:
$\|\vec{s}_\mathrm{B}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}$,
d.h. wächst mit der Zeit

Geschwindigkeit: $\vec{v}_\mathrm{B}(t) = \dot{\vec{s}}_\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t + \sin t + t\cos t \\ \cos t - \cos t + t\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}$, d.h. $\|\vec{v}_\mathrm{B}(t)\| = t$

Beschleunigung: $\vec{a}_\mathrm{B}(t) = \ddot{\vec{s}}_\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$

Normalenrichtung orthogonal zur Tangentenrichtung, d.h. zur Geschwindigkeit:
$\begin{pmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

b) **Körper A:** dünne Kurve, wiederholt durchlaufen

$\vec{s}_\mathrm{A}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\mathrm{A}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_\mathrm{A}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Körper B: dicke Kurve

$\vec{s}_\mathrm{B}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\mathrm{B}(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_\mathrm{B}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \end{pmatrix}$