Aufgabe 15.15

Ein Fahrzeug bewegt sich in Abhängigkeit von der in Sekunden gemessenen Zeit t gemäß $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\cos(t^2/100) \\ 50\sin(t^2/100) \end{pmatrix}$ (x und y in Meter).

a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor sowie die auf den zurückgelegten Weg bezogene Augenblicksgeschwindigkeit, die auf dem Tachometer angezeigt wird, und die auf den zurückgelegten Weg bezogene Augenblicksbeschleunigung!

b) Geben Sie für $t=0$ den Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor und für $t=\sqrt{50\pi}$ diese Vektoren sowie die auf den zurückgelegten Weg bezogene Augenblicksgeschwindigkeit und -beschleunigung zahlenmäßig an!

c) Skizzieren Sie die Bahnkurve von $t=0$ bis $t=\sqrt{50\pi}$! Zeichnen Sie in dieses Bild grob einige Geschwindigkeitsvektoren ein (analog zur Veranschaulichung von Vektorfeldern durch Pfeile)!

Lösung:

a) Geschwindigkeit: $\vec{v}(t)=\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t\sin\dfrac{t^2}{100} \\ t\cos\dfrac{t^2}{100} \end{pmatrix}$

Beschleunigung: $\vec{a}(t)=\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\dfrac{t^2}{100}-\dfrac{t^2}{25}\cos\dfrac{t^2}{100} \\ \cos\dfrac{t^2}{100}-\dfrac{t^2}{50}\sin\dfrac{t^2}{100} \end{pmatrix}$

Der Geschwindigkeitsvektor zeigt in die aktuelle Bewegungsrichtung, sein Betrag ist die auf den zurückgelegten Weg bezogene Geschwindigkeit:

$$v(t)=\|\vec{v}(t)\|=\sqrt{4t^2\sin^2\frac{t^2}{100}+t^2\cos^2\frac{t^2}{100}}=\sqrt{t^2+3t^2\sin^2\frac{t^2}{100}}$$

Die auf den zurückgelegten Weg bezogene Beschleunigung ist die Ableitung dieser (skalaren) Geschwindigkeit (und nicht der Betrag des Beschleunigungsvektors):

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\vec{v}(t)\|=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{t^2+3t^2\sin^2\frac{t^2}{100}}=\frac{2t+6t\sin^2\dfrac{t^2}{100}+3t^2\dfrac{4t}{100}\sin\dfrac{t^2}{100}\cos\dfrac{t^2}{100}}{2\sqrt{t^2+3t^2\sin^2\dfrac{t^2}{100}}}$$

$$=\frac{t+3t\sin^2\dfrac{t^2}{100}+\dfrac{3t^3}{50}\sin\dfrac{t^2}{100}\cos\dfrac{t^2}{100}}{\sqrt{t^2+3t^2\sin^2\dfrac{t^2}{100}}}$$

b) $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{x}(\sqrt{50\pi})=\begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}(\sqrt{50\pi})=\begin{pmatrix} -2\sqrt{50\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a}(\sqrt{50\pi})=\begin{pmatrix} -2 \\ -\pi \end{pmatrix}$,

$v(\sqrt{50\pi})=2\sqrt{50\pi}\approx 25.07,\quad a(\sqrt{50\pi})=2$

Nach $\sqrt{50\pi}\approx 12.53$ s ist eine Geschwindigkeit von ca. 25.07 m/s erreicht, die Beschleunigungskomponente in Bewegungsrichtung beträgt 2 m/s^2.

c) Es gilt $\dfrac{(x(t))^2}{100^2}+\dfrac{(y(t))^2}{50^2}=1$, die Bewegung erfolgt also auf einer Ellipse mit den Halbachsen 100 und 50. Zwischen den angegebenen Zeitpunkten wird der Weg von $(100,0)$, nach $(0,50)$, also die im I. Quadranten gelegene Viertelellipse, durchlaufen.

Die Geschwindigkeitsvektoren zeigen in Bewegungsrichtung, sind also tangential zur Bahnkurve. Da die Maßeinheit $\mathrm{m/s}$ ist, zeigt ihre Darstellung durch Pfeile, wohin sich das Fahrzeug bewegen würde, wenn es sich vom entsprechenden Kurvenpunkt aus 1 Sekunde in Richtung der Tangente bewegen würde.

Im betrachteten Bereich steigt die Geschwindigkeit von 0 auf 25.07 m/s. Die Pfeillänge nimmt also zu, der an den Punkt $(0,50)$ geheftete Pfeil hat eine Länge von 25.07 und ist parallel entgegengesetzt zur x–Achse gerichtet.

In der nebenstehenden Abbildung sind die Geschwindigkeitsvektoren für $t=0$ bis $t=12$ im Sekundenabstand eingezeichnet.