## Aufgabe 15.15

Ein Fahrzeug bewegt sich in Abhängigkeit von der in Sekunden gemessenen Zeit t gemäß  $\binom{x(t)}{y(t)} = \binom{100\cos(t^2/100)}{50\sin(t^2/100)}$  (x und y in Meter).

- a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor sowie die auf den zurückgelegten Weg bezogene Augenblicksgeschwindigkeit, die auf dem Tachometer angezeigt wird, und die auf den zurückgelegten Weg bezogene Augenblicksbeschleunigung!
- b) Geben Sie für t=0 den Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor und für  $t=\sqrt{50\pi}$  diese Vektoren sowie die auf den zurückgelegten Weg bezogene Augenblicksgeschwindigkeit und -beschleunigung zahlenmäßig an!
- c) Skizzieren Sie die Bahnkurve von t = 0 bis  $t = \sqrt{50\pi}$ ! Zeichnen Sie in dieses Bild grob einige Geschwindigkeitsvektoren ein (analog zur Veranschaulichung von Vektorfeldern durch Pfeile)!

## Lösung:

a) Geschwindigkeit: 
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \sin \frac{t^2}{100} \\ t \cos \frac{t^2}{100} \end{pmatrix}$$
Beschleunigung:  $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin \frac{t^2}{100} - \frac{t^2}{25}\cos \frac{t^2}{100} \\ \cos \frac{t^2}{100} - \frac{t^2}{50}\sin \frac{t^2}{100} \end{pmatrix}$ 

Der Geschwindigkeitsvektor zeigt in die aktuelle Bewegungsrichtung, sein Betrag ist die auf den zurückgelegten Weg bezogene Geschwindigkeit:

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{4t^2 \sin^2 \frac{t^2}{100} + t^2 \cos^2 \frac{t^2}{100}} = \sqrt{t^2 + 3t^2 \sin^2 \frac{t^2}{100}}$$

Die auf den zurückgelegten Weg bezogene Beschleunigung ist die Ableitung dieser (skalaren) Geschwindigkeit (und nicht der Betrag des Beschleunigungsvektors):

$$a(t) = \frac{d}{dt} ||\vec{v}(t)|| = \frac{d}{dt} \sqrt{t^2 + 3t^2 \sin^2 \frac{t^2}{100}} = \frac{2t + 6t \sin^2 \frac{t^2}{100} + 3t^2 \frac{4t}{100} \sin \frac{t^2}{100} \cos \frac{t^2}{100}}{2\sqrt{t^2 + 3t^2 \sin^2 \frac{t^2}{100}}}$$

$$= \frac{t + 3t \sin^2 \frac{t^2}{100} + \frac{3t^3}{50} \sin \frac{t^2}{100} \cos \frac{t^2}{100}}{\sqrt{t^2 + 3t^2 \sin^2 \frac{t^2}{100}}}$$

b) 
$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$
,  $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{d}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $\vec{x}(\sqrt{50\pi}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}(\sqrt{50\pi}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{50\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{d}(\sqrt{50\pi}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -\pi \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}(\sqrt{50\pi}) = 2\sqrt{50\pi} \approx 25.07$ ,  $\vec{d}(\sqrt{50\pi}) = 2$ 

Nach  $\sqrt{50\pi} \approx 12.53$  s ist eine Geschwindigkeit von ca. 25.07 m/s erreicht, die Beschleunigungskomponente in Bewegungsrichtung beträgt 2 m/s<sup>2</sup>.

Aufgabe 15.15

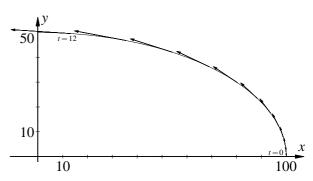
c) Es gilt  $\frac{(x(t))^2}{100^2} + \frac{(y(t))^2}{50^2} = 1$ , die Bewegung erfolgt also auf einer Ellipse mit den Halbachsen

100 und 50. Zwischen den angegebenen Zeitpunkten wird der Weg von (100,0), nach (0,50), also die im I. Quadranten gelegene Viertelellipse, durchlaufen.

Die Geschwindigkeitsvektoren zeigen in Bewegungsrichtung, sind also tangential zur Bahnkurve. Da die Maßeinheit m/s ist, zeigt ihre Darstellung durch Pfeile, wohin sich das Fahrzeug bewegen würde, wenn es sich vom entsprechenden Kurvenpunkt aus 1 Sekunde in Richtung der Tangente bewegen würde.

Im betrachteten Bereich steigt die Geschwindigkeit von 0 auf 25.07 m/s. Die Pfeillänge nimmt also zu, der an den Punkt (0,50) geheftete Pfeil hat eine Länge von 25.07 und ist parallel entgegengesetzt zur *x*–Achse gerichtet.

In der nebenstehenden Abbildung sind die Geschwindigkeitsvektoren für t=0 bis t=12 im Sekundenabstand eingezeichnet.



2