Aufgabe 15.14

Gegeben sei die Vektorfunktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass durch diese Vektorfunktion eine geschlossene Kurve beschrieben wird, die auf der Kugel $x^2+y^2+z^2=4$ verläuft!

b) Zeigen Sie, dass alle Punkte dieser Kurve in einer Ebene liegen, geben Sie die Gleichung dieser Ebene an!

c) Um was für eine Kurve handelt es sich?

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $(0,0,2)$!

e) $\vec{x}(t)$ beschreibe die Bewegung eines Massepunktes. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit und Beschleunigung! Sind Geschwindigkeit und Beschleunigung zueinander orthogonal? Begründen Sie die Orthogonalität bzw. Nichtorthogonalität dieser beiden Vektoren auch physikalisch!

Lösung:

a) $\cos t$ und $\sin t$ sind 2π–periodisch. $\Longrightarrow$ $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ ist 2π–periodisch.

$\Longrightarrow$ Alle Punkte der Kurve ergeben sich für $0 \le t < 2\pi$ und es gilt $\vec{x}(0)=\vec{x}(2\pi)$, also handelt es sich um eine geschlossene Kurve.

Weiterhin gilt für alle Punkte der Kurve $x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2 = 2\cos^2 t+2\cos^2 t+4\sin^2 t = 4(\cos^2 t+\sin^2 t) = 4$, also verläuft sie auf der Kugel $x^2+y^2+z^2=4$

b) Um die Ebenengleichung zu bestimmen, kann man von 3 Punkten auf der Kurve ausgehen, z.B. $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Richtungsvektoren der Ebene sind dann z.B. die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$, als Stellungsvektor erhält man daraus

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Ebenengleichung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$, also $x-y=0$.

Da für alle Punkte der Kurve $x(t)=y(t)$ gilt, erfüllen sie alle diese Ebenengleichung. Also liegen alle Punkte der Kurve in der Ebene $x-y=0$.

c) Bei der Kurve handelt es sich um den Schnitt der Kugel $x^2+y^2+z^2=4$ mit der Ebene $x-y=0$, die durch ihren Mittelpunkt, das ist der Koordinatenursprung, geht. Also handelt es sich um einen Kreis mit dem Radius 2 um den Koordinatenursprung in der Ebene $x-y=0$.

d) $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\sin t\\ -\sqrt{2}\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}$. Der Punkt $(0,0,2)$ ergibt sich für $t=\dfrac{\pi}{2}$, also ist $\dot{\vec{x}}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$ und damit auch $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ Richtungsvektor der Tangente.

Folglich lautet die Tangentengleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

e) Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\sin t\\ -\sqrt{2}\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}$, Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\cos t\\ -\sqrt{2}\cos t\\ -2\sin t\end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}}(t)\cdot\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\sin t\\ -\sqrt{2}\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\cos t\\ -\sqrt{2}\cos t\\ -2\sin t\end{pmatrix}=2\sin t\cos t+2\sin t\cos t-4\sin t\cos t=0,$ also sind Geschwindigkeit und Beschleunigung zueinander orthogonal.

Der Betrag der Geschwindigkeit des Massepunktes ist konstant:

$\left\|\dot{\vec{x}}(t)\right\|=\sqrt{2\sin^2 t+2\sin^2 t+4\cos^2 t}=\sqrt{4}=2.$

Folglich hat die Beschleunigung keine Komponente in Bewegungsrichtung, vielmehr ist sie orthogonal dazu, zeigt also in Richtung des Kreismittelpunktes.