

### Aufgabe 15.12

Ein Fahrzeug bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius 20 nach  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 20 \cos \frac{t}{2} \\ 20 \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ .

- Berechnen Sie den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor!
- Zeigen Sie, dass in diesem Falle der Beschleunigungsvektor orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor ist!
- Warum ist der Betrag der Beschleunigung nicht gleich 0, obwohl auf dem Tachometer eine konstante Geschwindigkeit angezeigt wird? Welcher Zusammenhang besteht zu der Orthogonalität von Geschwindigkeit und Beschleunigung?

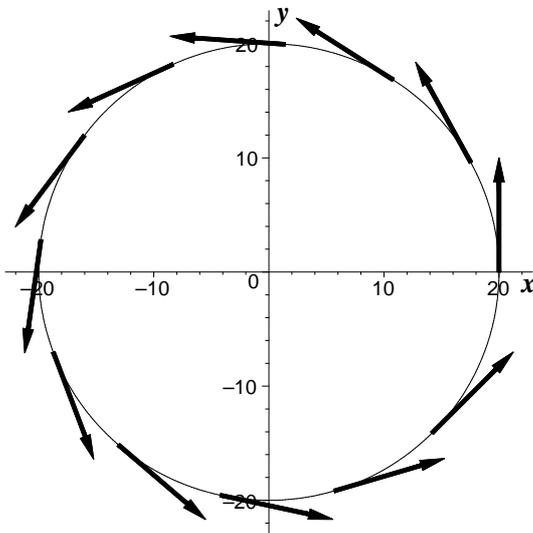
### Lösung:

- a) Ableitung von Vektorfunktionen (vektoriellen Funktionen von einem Skalar) erfolgt komponentenweise.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -10 \sin \frac{t}{2} \\ 10 \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -5 \cos \frac{t}{2} \\ -5 \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

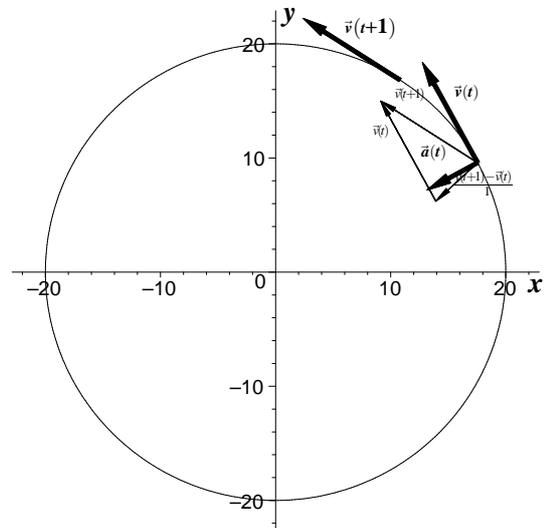
$$\text{b) } \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -10 \sin \frac{t}{2} \\ 10 \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \cos \frac{t}{2} \\ -5 \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix} = 50 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} - 50 \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} = 0$$

c)



Geschwindigkeitsvektoren  
im Einheiten-(z.B. Sekunden-)abstand

Ableiten ist Linearisieren. Die Pfeile zeigen daher, wohin sich das Fahrzeug bewegen würde, wenn es sich vom entsprechenden Kurvenpunkt aus 1 Einheit lang in Richtung der Tangente bewegen würde.



Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{v}(t)$  und  $\vec{v}(t+1)$   
sowie Beschleunigungsvektor  $\vec{a}(t)$   
(eingezeichnet für  $t = 1$ )

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{\vec{v}(t+1) - \vec{v}(t)}{1} \end{aligned}$$

Auf dem Tachometer wird die Geschwindigkeit längs des zurückgelegten Weges, das ist der

Betrag des Geschwindigkeitsvektors, angezeigt:  $\|\vec{v}(t)\| = 10 \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}} = 10$ .

Die Bewegung längs des Kreises erfolgt gleichmäßig, der Geschwindigkeitsbetrag ist konstant. Mit der Beschleunigung wird die Änderung der Geschwindigkeit gemessen. Eine Änderung erfolgt nur orthogonal zur Tangentenrichtung, da die Geschwindigkeit in Bewegungs- (Tangenten-)richtung konstant ist. Deshalb hat der Beschleunigungsvektor keine Komponente in Tangentenrichtung, er ist orthogonal dazu. Die Ableitung des Geschwindigkeitsbetrages ist 0, das ist aber nicht der Beschleunigungsbetrag, da in diesen auch die Beschleunigung orthogonal zur Bewegungsrichtung eingeht (die das Fahren im Kreis sichert).