Aufgabe 15.9

a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t^3+1 \\ t^2-1 \\ t^2+t \end{pmatrix}$ im Koordinatenursprung!

b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt dieser Tangente mit der Ebene $z=0{,}11$!

c) Vergleichen Sie diesen Schnittpunkt mit den Schnittpunkten der Kurve $\vec{x}(t)$ mit dieser Ebene! Was stellen Sie fest?

Lösung:

a) Koordinatenursprung: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t^3+1 \\ t^2-1 \\ t^2+t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies t^3+1=0 \implies t=-1.$

Offensichtlich sind für $t=-1$ auch die beiden anderen Komponenten gleich 0, so dass tatsächlich $\vec{x}(-1)=\vec{0}$ ist.

$\vec{x}\,'(t)=\begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 2t+1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}\,'(-1)=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, Tangente: $\vec{T}(u)=\vec{x}(-1)+u\vec{x}\,'(-1)=u\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Die Tangente $\vec{T}(u)=\begin{pmatrix} 3u \\ -2u \\ -u \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene $z=0.11$ für $-u=0.11$, $-u=0.11$, also im Punkt $(-0.33, 0.22, 0.11)$.

c) $t^2+t=0.11$, $t^2-t-0.11=0$, $t_{1/2}=-0.5\pm\sqrt{0.25+0.11}=-0.5\pm0.6=\begin{cases} 0.1 \\ -1.1 \end{cases}$

Damit erhält man für die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der Ebene $z=0{,}11$ die Ortsvektoren $\vec{x}(0.1)=\begin{pmatrix} 1.001 \\ -0.99 \\ 0.11 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}(-1.1)=\begin{pmatrix} -0.331 \\ 0.21 \\ 0.11 \end{pmatrix}$. Der 2. Schnittpunkt, der zu dem in der Nähe von $t=-1$ liegenden Parameter $t=-1.1$ gehört, liegt in der Nähe des Schnittpunktes der Tangente mit der Ebene. In der Nähe von $\vec{x}(-1)=\vec{0}$ wird die Kurve durch die berechnete Tangente approximiert.

Die Kurve $\vec{x}(t)$ schneidet die Ebene x-y-Ebene auch im Punkt $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t=0$. Der 1. Schnittpunkt mit der Ebene $z=0.11$ gehört zu dem in der Nähe von $t=0$ liegenden Parameter $t=0.1$.