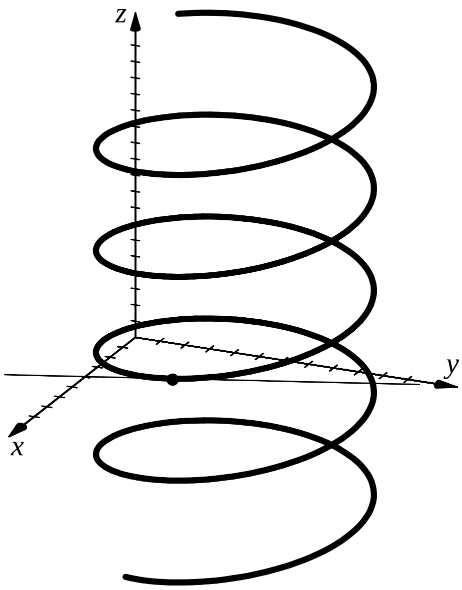
Aufgabe 15.4

a) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2+5\cos t \\ 3+5\sin t \\ t \end{pmatrix}$? Skizzieren Sie die Kurve!

b) Ermitteln Sie den Durchstoßpunkt der Kurve durch die x-y-Ebene und die Gleichung der Tangente in diesem Punkt!

c) In welchem Winkel schneidet die Kurve die x-y-Ebene?

Lösung:



a) Es handelt sich um eine Schraubenlinie. Durch Einsetzen von $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ überzeugt man sich leicht davon, dass sie auf dem Kreiszylinder $(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$, also dem Kreiszylinder mit der Achse $(-2,3,z)$ und dem Radius 5, verläuft.

b) Für $z=t=0$ erhält man $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, so dass die Kurve im Punkt $(3,3,0)$ die x-y-Ebene durchstößt.

Ferner ist $\vec{x}\,'(t)=\begin{pmatrix} -5\sin t \\ 5\cos t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}\,'(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Tangente in diesem Punkt also $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Die Richtung der Kurve im Durchstoßpunkt, das ist die Richtung der Tangente in diesem Punkt, bildet mit dem Normalenvektor der x-y-Ebene einen Winkel von

$$\arccos\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}=\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}\approx 78.69^\circ.$$

Die Schraubenlinie schneidet die x-y-Ebene somit in einem Winkel von 11.31°. (Das kann man natürlich auch direkt mit dem Arkussinus berechnen.)

(Man kann den Winkel auch mit der Richtungsableitung von $z(x,y)=\arctan\dfrac{y-3}{x+2}$ im Punkt $(x,y)=(3,3)$ in Richtung der Projektion der Schraubenlinie in die x-y-Ebene, das ist in diesem Punkt (für die Richtungsableitung normiert) die Richtung $\vec{v}_n=(0,1)^{\mathsf{T}}$.

Es gilt dann $\nabla z(x,y)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{1+\left(\frac{y-3}{x+2}\right)^2}\dfrac{y-3}{(x+2)^2} \\ \dfrac{1}{1+\left(\frac{y-3}{x+2}\right)^2}\dfrac{1}{x+2} \end{pmatrix}$, $\nabla z(3,3)=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial z(3,3)}{\partial \vec{v}_n}=\nabla z(3,3)\cdot\vec{v}_n=\dfrac{1}{5}$.

Der Schnittwinkel ist somit $\arctan\dfrac{1}{5}\approx 11.31^\circ$.)