Aufgabe 15.3

Betrachtet werden die Kurven $\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ jeweils für $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ gilt! Welches Analogon hat diese Beziehung für Winkelfunktionen?

b) Berechnen Sie die Tangentenvektoren für die drei Kurven!

c) Geben Sie mithilfe der Beziehungen aus a) parameterfreie Gleichungen der drei Kurven an!

d) Stellen Sie die drei Kurven grafisch dar! Wie oft werden die Kurven für $-\infty < t < \infty$ durchlaufen?

e) Beschreiben Sie die in der oberen Halbebene (einschließlich x-Achse) gelegenen Teile der drei Kurven als Funktionen $y = f_i(x)$, $i = 1,2,3$!

f) Berechnen Sie für die drei Funktionen die Ableitung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zum einen mithilfe der Formel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ aus $\vec{x}\,'(t)$, zum anderen als $f'(x)$!

g) Die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ sollen zu einer einheitlichen über der gesamten x-Achse definierten Funktion zusammengefasst werden. Beschreiben Sie diese Funktion durch einen einheitlichen Ausdruck!

h) Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten an die gegebenen Kurven in den Punkten $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(1,0)$ und $(2,\sqrt{3})$ und zeichnen Sie die Tangenten in das Bild aus d) ein!

Lösung:

a) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{2t} + 2 + e^{-2t}) - (e^{2t} - 2 + e^{-2t})}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Dies entspricht für Winkelfunktionen dem Satz des Pythagoras $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

b) $\vec{x}_1\,'(t) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2\,'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3\,'(t) = \begin{pmatrix} -\sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$

c) $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_3(t)$: $x^2 - y^2 = 1$ (Hyperbel)
$\vec{x}_2(t)$: $x^2 + y^2 = 1$ (Kreis)

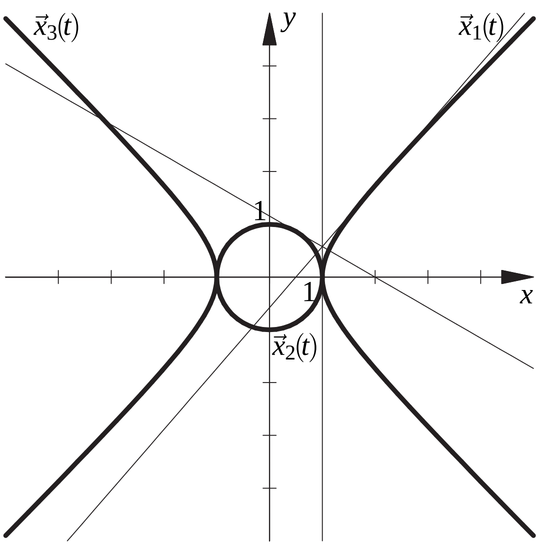
$\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_3(t)$ werden einmal durchlaufen, da der Sinus Hyperbolicus monoton von $-\infty$ nach ∞ wächst.

$\vec{x}_2(t)$ wird unendlich oft durchlaufen, da Sinus und Kosinus periodisch mit gleicher Periodenlänge sind.

Bei h) berechnete Tangenten:

$x + \sqrt{3}y = 2$ für den Punkt $(1/2, \sqrt{3}/2)$,
$x = 1$ für den Punkt $(1,0)$,
$2x - \sqrt{3}y = 1$ für den Punkt $(2, \sqrt{3})$.

d)



e) $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_3(t)$: $y^2=x^2-1,\ y=\sqrt{x^2-1}$
$\vec{x}_2(t)$: $y^2=1-x^2,\ y=\sqrt{1-x^2}$ (da jeweils obere Halbebene)

$$\begin{aligned} f_1(x)&=\sqrt{x^2-1}, \quad 1\le x,\\ f_2(x)&=\sqrt{1-x^2}, \ -1\le x\le \ 1,\\ f_3(x)&=\sqrt{x^2-1}, \qquad x\le -1 \end{aligned}$$

f) $\vec{x}_1(t)$: $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}=\dfrac{y_1'(t)}{x_1'(t)}=\dfrac{\cosh t}{\sinh t}=\coth t,\quad f_1'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(Wg. $y\ge 0$ (obere HE) ist $y=\sqrt{x^2-1}$, so dass sich in beiden Fällen $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\cosh t}{\sinh t}$ ergibt.)

$\vec{x}_2(t)$: $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2}=\dfrac{y_2'(t)}{x_2'(t)}=\dfrac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t,\quad f_2'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(Wg. $y\ge 0$ (obere HE) ist $y=\sqrt{1-x^2}$, so dass sich in beiden Fällen $-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}$ ergibt.)

$\vec{x}_3(t)$: $\dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x_3}=\dfrac{y_3'(t)}{x_3'(t)}=\dfrac{\cosh t}{-\sinh t}=-\coth t,\quad f_3'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(Wg. $y\ge 0$ (obere HE) ist $y=\sqrt{x^2-1}$, so dass sich in beiden Fällen $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-\cosh t}{\sinh t}$ ergibt.)

g) $f(x)=\sqrt{|x^2-1|},\ \ x\in\mathbb{R}$

h) $(1/2,\sqrt{3}/2)$ liegt wegen $x^2+y^2=1$ auf dem Kreis $\vec{x}_2(t)$, dabei ist

$\vec{x}_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2{}'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$, die Tangente also $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$.

Man kann auch mit mit der Darstellung $f_2(x)$ argumentieren, die Tangentengleichung ergibt sich da zu $T_1(x)=f_2\left(\dfrac{1}{2}\right)+f_2'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, d.h. $x+\sqrt{3}y=2$, das ist die parameterfreie Darstellung der oben mit dem Parameter u beschriebenen Gerade.

$(1,0)$ liegt wegen $x^2\pm y^2=1$ auf dem Kreis $\vec{x}_2(t)$ und auf dem rechten Hyperbelzweig $\vec{x}_1(t)$, dabei ist

$\vec{x}_2(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2{}'(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, die Tangente an den Kreis also $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

$\vec{x}_1(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_1{}'(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, die Tangente an die Hyperbel also auch $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

Für die Darstellungen $f_2(x)$ und $f_1(x)$ streben die Ableitungen für $x\to 1$ gegen $-\infty$ bzw. ∞, so dass sich die senkrechte Gerade $x=1$ ergibt, das ist die parameterfreie Darstellung der angegebenen Gerade.

$(2,\sqrt{3})$ liegt wegen $x^2-y^2=1,\ x\ge 1$ auf dem rechten Hyperbelzweig $\vec{x}_1(t)$. Da sich der Tangentenvektor einfach durch Vertauschen der Komponenten des Ortsvektors ergibt, muss man den Parameter $\bar{t}$ nicht explizit berechnen. Es gilt

$\vec{x}_1(\bar{t})=\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\vec{x}_1{}'(\bar{t})=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$, die Tangente also $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$.

Man kann auch mit mit der Darstellung $f_1(x)$ argumentieren, die Tangentengleichung ergibt sich da zu $T_1(x) = f_1(2) + f_2'(2)(x-2) = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x-2) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}x$, d.h. $2x - \sqrt{3}y = 1$, das ist die parameterfreie Darstellung der angegebenen Gerade.