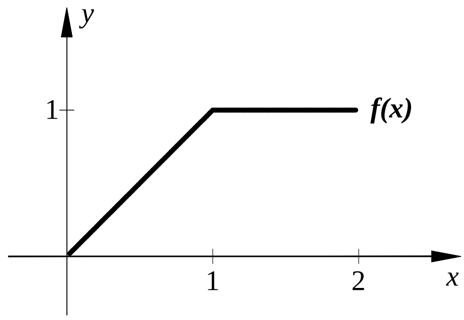
Aufgabe 14.36

Über dem Intervall $(0,2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 2\}$ sei die in der Abbildung dargestellte Funktion $f(x)$ definiert.



Die Funktion $f(x)$ werde 2-periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt.

a) Berechnen Sie die Fourierreihe dieser Funktion!
b) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?
c) Geben Sie die komplexe Form der Fourierreihe an!

Lösung:

a) $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x)$

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos k\pi x \,\mathrm{d}x, \quad b_k = \int_0^2 f(x)\sin k\pi x \,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \int_0^1 x\cos k\pi x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \cos k\pi x \,\mathrm{d}x$$

$$\int x\cos k\pi x \,\mathrm{d}x = x\frac{\sin k\pi x}{k\pi} - \int \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\,\mathrm{d}x = x\frac{\sin k\pi x}{k\pi} + \frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2}$$

$$a_k = \left[x\frac{\sin k\pi x}{k\pi} + \frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\right]_0^1 + \left[\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right]_1^2 = \frac{\cos k\pi - 1}{(k\pi)^2} = \begin{cases} -\dfrac{2}{(k\pi)^2} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade}, \neq 0 \end{cases}$$

$$k = 0: \quad a_0 = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [x]_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$b_k = \int_0^1 x\sin k\pi x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \sin k\pi x \,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sin k\pi x \,\mathrm{d}x = -x\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + \int \frac{\cos k\pi x}{k\pi}\,\mathrm{d}x = -x\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^2}$$

$$b_k = \left[-x\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^2}\right]_0^1 - \left[\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right]_1^2 = -\frac{\cos k\pi}{k\pi} - \frac{\cos 2k\pi}{k\pi} + \frac{\cos k\pi}{k\pi} = -\frac{1}{k\pi}$$

Fourierreihe: $f(x) \sim \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2l-1)\pi x}{(2l-1)^2} - \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\pi x}{k}$

b) Konvergenz gegen $\begin{cases} f(x) & x \neq 2l \\ \dfrac{1}{2} & x = 2l \end{cases}, \quad l \in \mathbb{Z}$

c) $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}$

$$k \geq 1: \quad c_k \;\; = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k) = \begin{cases} -\frac{1}{k^2\pi^2} + \frac{1}{2k\pi}\mathrm{i} & k \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2k\pi}\mathrm{i} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k) = \begin{cases} -\frac{1}{k^2\pi^2} - \frac{1}{2k\pi}\mathrm{i} & k \text{ ungerade} \\ -\frac{1}{2k\pi}\mathrm{i} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Da bei $-k$ auch im hinteren Term $-k$ steht, gilt $c_k = \begin{cases} -\frac{1}{k^2\pi^2} + \frac{1}{2k\pi}\mathrm{i} & k \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2k\pi}\mathrm{i} & k \text{ gerade} \end{cases}$ einheitlich für $k \neq 0$. Also ergibt sich als komplexe Form der Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2l-1)x}}{(2l-1)^2} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k}.$$