Aufgabe 14.35

Die über dem Intervall $-\pi < t \leq \pi$ durch $g(t) = \begin{cases} 1-\cos t, & -\pi < t < 0 \\ \cos t - 1, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$ definierte Funktion werde periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Die so entstandene Funktion soll überall mit $g(t)$ bezeichnet werden.

a) Skizzieren Sie die Funktion $g(t)$!

b) Entwickeln Sie die Funktion $g(t)$ in eine Fourierreihe!

Hinweis: $\sin x \, \cos y = \dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$

c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

d) Kann die Funktion $g(t)$ an der Stelle $t_0 = 0$ bzw. an der Stelle $t_0 = \pi/4$ in eine Taylorreihe entwickelt werden? Führen Sie die Entwicklung aus, wenn das möglich ist!

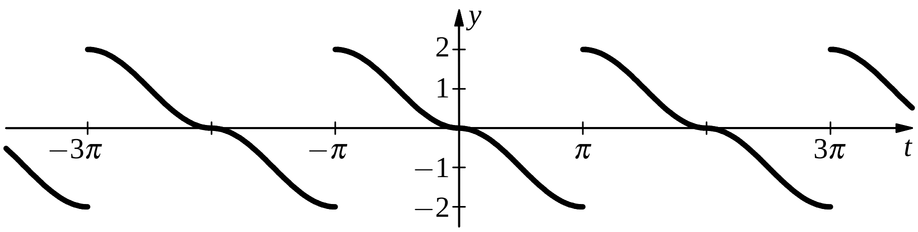
Hinweis: Da $\dfrac{k(k+1)}{2}$ genau dann gerade ist, wenn k bei Division durch 4 den Rest 0 oder 3 lässt, ist für eine zusammengefasste Darstellung der Reihe die Verwendung des Ausdrucks $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$ nützlich.

e) In welcher Situation wäre die Taylorentwicklung aus d) gegenüber der Fourierentwicklung aus b) zu bevorzugen?

f) Für welche t konvergiert die ermittelte Taylorreihe? Wann liegt nach dem Satz von Taylor Konvergenz gegen $g(t)$ vor?

Lösung:

a)



b) Periodenlänge 2π, also $g(t) \sim a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$. Da $g(t)$ ungerade ist, gilt $a_k = 0 \ \forall k$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin kt \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin kt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos t - 1)\sin kt\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin kt\,\cos t - \sin kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(\sin(k+1)t + \sin(k-1)t - 2\sin kt\big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(k+1)t}{k+1} - \frac{\cos(k-1)t}{k-1} + 2\frac{\cos kt}{k}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{2}{k}\right) - \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k-1} + \dfrac{2}{k}\right), & k \text{ ungerade}, \neq 1 \\ \dfrac{1}{\pi}\left(+\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k-1} + \dfrac{2}{k}\right) - \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k-1} + \dfrac{2}{k}\right), & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{k}, & k \text{ ungerade}, \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k-1}\right) = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{k}{(k-1)(k+1)}, & k \text{ gerade} \end{cases}$$

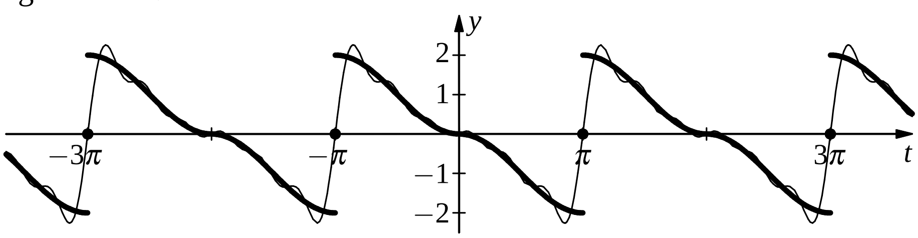
Da es sich um die Sinuskoeffizienten handelt, spielt der Fall $k=0$ keine Rolle. Für $k=1$ ist allerdings wegen $k-1=0$ die Integration nicht in der angegebenen Form durchführbar. Allerdings gilt $b_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\sin 2t-2\sin t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 2t}{2}+2\cos t\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}-2+\frac{1}{2}-2\right)=-\frac{4}{\pi}$,

so dass allgemein gilt $b_k=\begin{cases}-\frac{4}{\pi}\frac{1}{k}, & k \text{ ungerade}\\ \frac{4}{\pi}\frac{k}{(k-1)(k+1)}, & k \text{ gerade}\end{cases}$.

Die Fourierentwicklung lautet also

$$g(t)\sim-\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2l-1)t}{2l-1}+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l}{(2l-1)(2l+1)}\sin 2lt$$
$$=\frac{4}{\pi}\left(-\sin t+\frac{2}{1\cdot 3}\sin 2t-\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{4}{3\cdot 5}\sin 4t-\frac{1}{5}\sin 5t\pm\cdots\right).$$

In der folgenden Abbildung ist die nach dem Term mit $\sin 6t$ abgebrochene Fourierentwicklung mit eingezeichnet.



c) Da die Funktion jeweils im Intervall $(2l-1)\pi<t<(2l+1)\pi$ stetig und monoton ist, konvergiert die Fourierreihe dort gegen die Funktion selbst. An den Sprungstellen $t=(2l-1)\pi$ konvergiert sie dagegen gegen $\big((-2)+2\big)/2=0$.

d) Voraussetzung für die Entwicklung in eine Taylorreihe ist, dass $g(t)$ im Entwicklungspunkt beliebig oft differenzierbar ist. Für $t_0=0$ ergibt sich als 2. Ableitung von links $\cos 0=1$, von rechts $-\cos 0=-1$, so dass schon die 2. Ableitung nicht existiert und damit keine Taylorentwicklung möglich ist. Für $t_0=\pi/4$ existieren aber alle Ableitungen, so dass die Taylorentwicklung in diesem Punkt möglich ist:

$$\begin{array}{lll lll}
g(t) &=& \cos t-1 & g(\pi/4) &=& 1/\sqrt{2}-1\\
g'(t) &=& -\sin t & g'(\pi/4) &=& -1/\sqrt{2}\\
g''(t) &=& -\cos t & g''(\pi/4) &=& -1/\sqrt{2}\\
g'''(t) &=& \sin t & g'''(\pi/4) &=& 1/\sqrt{2}\\
g^{(4)}(t) &=& \cos t & g^{(4)}(\pi/4) &=& 1/\sqrt{2}\\
g^{(5)}(t) &=& -\sin t & g^{(5)}(\pi/4) &=& -1/\sqrt{2}\\
\cdots & & & \cdots & & \\
g^{(4k)}(t) &=& \cos t & g^{(4k)}(\pi/4) &=& 1/\sqrt{2}\ \ (k\neq 0)\\
g^{(4k+1)}(t) &=& -\sin t & g^{(4k+1)}(\pi/4) &=& -1/\sqrt{2}\\
g^{(4k+2)}(t) &=& -\cos t & g^{(4k+2)}(\pi/4) &=& -1/\sqrt{2}\\
g^{(4k+3)}(t) &=& \sin t & g^{(4k+3)}(\pi/4) &=& 1/\sqrt{2}
\end{array}$$

Für $k\neq 0$ gilt also

$$g^{(k)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Die Taylorentwicklung an der Stelle $t_0=\pi/4$ lautet also

$$P(t)=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{k!}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)^k$$

$$= -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)^4 \mp \cdots\right).$$

e) Da die Taylorentwicklung mit den lokalen Eigenschaften von $g(t)$ an der Stelle $\pi/4$ arbeitet, ist sie dann zu bevorzugen, wenn es um das Verhalten von $g(t)$ in der Nähe dieses Punktes geht.

f) Wegen $c_k = \dfrac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{k!\sqrt{2}}$ ergibt sich für den Konvergenzradius

$r = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(k+1)!\sqrt{2}}{k!\sqrt{2}} = \lim\limits_{k\to\infty}(k+1) = \infty,$ die Taylorreihe konvergiert also überall.

Allerdings ist damit noch nicht gesagt, dass Konvergenz gegen $g(t)$ vorliegt. Die Taylorreihe konvergiert in einem Intervall um den Entwicklungspunkt, wenn die Funktion in diesem Intervall beliebig oft differenzierbar ist und die Folge der Restglieder gegen 0 konvergiert. Da die Funktion $g(t)$ für $t = \pi$ einen Sprung und für $t = 0$ keine 2. Ableitung hat, kann diese Voraussetzung nur für $t \in (0, \pi)$ erfüllt sein.

Das Restglied ist $R_n(t) = \dfrac{g^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)^{n+1}$, τ zwischen $\pi/4$ und t. $g^{(n+1)}(t)$ ist eine ggf. mit -1 multiplizierte Sinus- oder Kosinusfunktion, sie kann also betragsmäßig nicht größer als 1 werden. Deshalb gilt $|R_n(t)| \le \dfrac{(t-\pi/4)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, da der Zähler in jedem Schritt mit $(t-\pi/4)$, der Nenner aber mit $n+1 \to \infty$ multipliziert wird. Also konvergiert die Taylorreihe im Intervall $(0, \pi)$ gegen $g(t)$, dort gilt $g(t) = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{k!}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)^k$.

In der folgenden Abbildung ist die nach der 20. Potenz abgebrochene Taylorentwicklung mit eingezeichnet. Die Taylorentwicklung konvergiert überall gegen die unendlich glatte Funktion $\cos t - 1$, den Sprüngen und den Knicken in der Ableitung von $g(t)$ kann sie nicht folgen.