Aufgabe 14.34

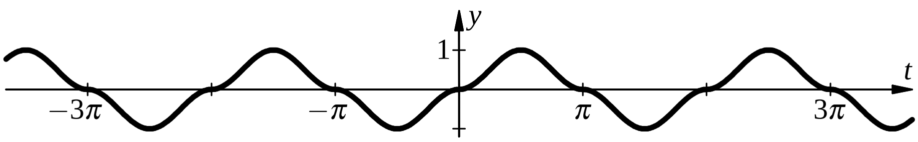
Die Funktion $f(t)=\begin{cases} \sin^2 t, & 0\le t\le \pi \\ -\sin^2 t, & -\pi<t<0 \end{cases}$ werde periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die durch die periodische Fortsetzung entstehende Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Für welche t konvergiert die Fourierreihe, wann erfolgt Konvergenz gegen $f(t)$?
d) Kann die Funktion an der Stelle $t_0=0$ bzw. an der Stelle $t_0=\pi/2$ in eine Taylorreihe entwickelt werden? Führen Sie die Entwicklung aus, wenn das möglich ist!
e) Für welche t konvergiert die ermittelte Taylorreihe? Wann liegt nach dem Satz von Taylor Konvergenz gegen $f(t)$ vor?
f) Bestimmen Sie Näherungswerte für $f(\pi/2)$ und $f(\pi/6)$, indem Sie die Fourier- bzw. Taylorentwicklung jeweils nach dem Glied mit $k=4$ abbrechen, und stellen Sie die so ermittelten Werte den exakten Funktionswerten gegenüber! Kommentieren Sie das Ergebnis!

Hinweis: $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ (auch für Taylorentwicklung nützlich!), $\sin x\cos y=\dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$

Lösung:

a)



b) $f(t)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$. Da $f(t)$ ungerade ist, gilt $a_k=0\ \ \forall k$.

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 t\,\sin kt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos 2t)\,\sin kt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\sin kt-\cos 2t\,\sin kt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\sin kt-\frac{1}{2}\sin(k+2)t-\frac{1}{2}\sin(k-2)t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos kt}{k}+\frac{\cos(k+2)t}{2(k+2)}+\frac{\cos(k-2)t}{2(k-2)}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2(k+2)}-\dfrac{1}{2(k-2)}\right)-\dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2(k+2)}+\dfrac{1}{2(k-2)}\right), & k \text{ ungerade}\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2(k+2)}+\dfrac{1}{2(k-2)}\right)-\dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2(k+2)}+\dfrac{1}{2(k-2)}\right), & k \text{ gerade}, \neq 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{2}{k}-\dfrac{1}{k+2}-\dfrac{1}{k-2}\right)=\dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{2(k^2-4)-k(k-2)-k(k+2)}{(k-2)k(k+2)} & k \text{ ungerade}\\[2ex] 0, & k \text{ gerade}, \neq 2\end{cases}$$

Da es sich um die Sinuskoeffizienten handelt, spielt der Fall $k=0$ keine Rolle. Für $k=2$ ist allerdings wegen $k-2=0$ die Integration nicht in der angegebenen Form durchführbar.

Allerdings gilt auch $b_2=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\sin 2t-\dfrac{1}{2}\sin 4t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\cos 2t}{2}+\dfrac{\cos 4t}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi}=0$, so dass

allgemein gilt $b_k=\begin{cases}-\dfrac{8}{\pi}\,\dfrac{1}{(k-2)k(k+2)} & k \text{ ungerade}\\[2ex] 0, & k \text{ gerade}\end{cases}$.

Die Fourierentwicklung lautet also
$$f(t) \sim -\frac{8}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)}\sin(2l-1)t = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{15}\sin 3t - \frac{1}{105}\sin 5t - \cdots\right).$$

c) Da die periodisch fortgesetzte Funktion überall stetig und stückweise monoton ist, konvergiert die Fourierreihe überall gegen diese Funktion. Wenn auch die Fortsetzung mit $f(t)$ bezeichnet wird, so gilt also
$$f(t) = -\frac{8}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)}\sin(2l-1)t = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{15}\sin 3t - \frac{1}{105}\sin 5t - \cdots\right).$$

d) Voraussetzung für die Entwicklung in eine Taylorreihe ist, dass $f(t)$ im Entwicklungspunkt beliebig oft differenzierbar ist. Für $t_0 = 0$ ergibt sich als 2. Ableitung von links -2, von rechts $+2$, so dass schon die 2. Ableitung nicht existiert und damit keine Taylorentwicklung möglich ist. Für $t_0 = \pi/2$ existieren aber alle Ableitungen, so dass die Taylorentwicklung in diesem Punkt möglich ist:
$$\begin{array}{llll}
f(t) & = \sin^2 t = (1-\cos 2t)/2 & f(\pi/2) & = 1 \\
f'(t) & = \sin 2t & f'(\pi/2) & = 0 \\
f''(t) & = 2\cos 2t & f''(\pi/2) & = -2 \\
f'''(t) & = -4\sin 2t & f'''(\pi/2) & = 0 \\
f^{(4)}(t) & = -8\cos 2t & f^{(4)}(\pi/2) & = 8 \\
f^{(5)}(t) & = 16\sin 2t & f^{(5)}(\pi/2) & = 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
f^{(4k)}(t) & = -2^{4k-1}\cos 2t & f^{(4k)}(\pi/2) & = 2^{4k-1} \quad (k \neq 0) \\
f^{(4k+1)}(t) & = 2^{4k}\sin 2t & f^{(4k+1)}(\pi/2) & = 0 \\
f^{(4k+2)}(t) & = 2^{4k+1}\cos 2t & f^{(4k+2)}(\pi/2) & = -2^{4k+1} \\
f^{(4k+3)}(t) & = -2^{4k+2}\sin 2t & f^{(4k+3)}(\pi/2) & = 0
\end{array}$$
Die Taylorentwicklung an der Stelle $t_0 = \pi/2$ lautet also
$$P(t) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l 2^{2l-1}}{(2l)!}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^{2l} = 1 - \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^4 \mp \cdots.$$

e) Da die Reihe nur Glieder mit geraden Exponenten enthält, kann zur Ermittlung des Konvergenzradius die Reihe $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l 2^{2l-1}}{(2l)!}\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^l = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l 2^{2l-1}}{(2l)!}u^l, \quad u = \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2$ betrachtet werden (Die Addition des absoluten Gliedes 1 hat auf die Konvergenz keinen Einfluss.). Diese hat den Konvergenzradius
$$r = \lim_{l\to\infty}\left|\frac{c_l}{c_{l+1}}\right| = \lim_{l\to\infty}\frac{\dfrac{2^{2l-1}}{(2l)!}}{\dfrac{2^{2l+1}}{(2l+2)!}} = \lim_{l\to\infty}\frac{2^{2l-1}}{(2l)!}\,\frac{(2l+2)!}{2^{2l+1}} = \lim_{l\to\infty}\frac{(2l+1)(2l+2)}{4} = \infty,$$
konvergiert also für beliebiges u. Damit konvergiert auch die Taylorreihe $P(t)$ überall.
Allerdings ist damit noch nicht gesagt, dass Konvergenz gegen $f(t)$ vorliegt. Die Taylorreihe konvergiert in einem Intervall um den Entwicklungspunkt, wenn die Funktion in diesem Intervall beliebig oft differenzierbar ist und die Folge der Restglieder gegen 0 konvergiert. Da die gegebene Funktion für $t = 0$ und für $t = 2\pi$ schon keine 2. Ableitung hat, kann diese Voraussetzung nur für $t \in (0, 2\pi)$ erfüllt sein. Das Restglied ist $R_n(t) = \dfrac{f^{(n+1)}(\bar{t})}{(n+1)!}\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)^{n+1}$, $\bar{t}$ zwischen $\pi/2$ und t. Da die Winkelfunktionen betragsmäßig nicht größer als 1 werden können, gilt $|R_n(t)| \leq \dfrac{2^n (t-\pi/2)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, da der Zähler in jedem Schritt mit $2(t-\pi/2)$, der

Nenner aber mit $n+1 \to \infty$ multipliziert wird. Also konvergiert die Taylorreihe im Intervall $(0, 2\pi)$ gegen $f(t)$, dort gilt $f(t) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^{2l-1}}{(2l)!}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^{2l}$.

f)

t	$f(t)$	$F_4(t) = \frac{8}{3\pi}\sin t - \frac{8}{15\pi}\sin 3t$	$P_4(t) = 1 - \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^4$
$\pi/2$	1	1.018591636	1
$\pi/6$	0.25	0.254647909	0.304237746

Die Taylorapproximation nutzt die lokalen Eigenschaften im Entwicklungspunkt und ist deshalb in dessen Umgebung gut, im Entwicklungspunkt selbst sogar naturgemäß exakt, während die Fourierapproximation das Verhalten der (periodischen) Funktion insgesamt besser erfasst.