Aufgabe 14.32

Eine 2π-periodische Funktion $f(x)$ sei bezüglich $x=\frac{\pi}{2}$ symmetrisch, d.h., es gelte $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$. Welche ihrer Fourierkoeffizienten sind mit Sicherheit gleich 0 ?

Lösung:

Durch eine Koordinatentransformation $x=\frac{\pi}{2}+t$ wird erreicht, dass die Funktion bezüglich $t=0$ symmetrisch, d.h. gerade wird. Wir setzen also $g(t)=f(\frac{\pi}{2}+t)$, d.h. $f(x)=g(x-\frac{\pi}{2})$. Dann gilt nämlich
$g(-t)=f(\frac{\pi}{2}-t)=f(\frac{\pi}{2}+t)=g(t),\ \ g(t+2\pi)=f(\frac{\pi}{2}+t+2\pi)=f(\frac{\pi}{2}+t)=g(t).$
Da $g(t)$ eine gerade 2π-periodische Funktion ist, lautet ihre Fourierentwicklung
$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt$. Folglich ist

$$\begin{aligned}f(x)&=g(x-\frac{\pi}{2})\\ &=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k(x-\frac{\pi}{2})=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi}{2}\cos kx+a_k\sin\frac{k\pi}{2}\sin kx).\end{aligned}$$

In der Fourierentwicklung von $f(x)$ verschwinden folglich die Glieder, für die $\cos\frac{k\pi}{2}$ bzw. $\sin\frac{k\pi}{2}$ verschwinden. Somit sind die **ungeraden Kosinuskoeffizienten** und die **geraden Sinuskoeffizienten** mit Sicherheit gleich 0.

Tatsächlich sind ja $\cos(2n+1)x$ und $\sin 2nx$ bezüglich $x=\frac{\pi}{2}$ ungerade, während $\cos 2nx$ und $\sin(2n+1)x$ bezüglich $x=\frac{\pi}{2}$ gerade sind.