## Aufgabe 14.29

Die Funktion $f(x)=\begin{cases} 0 & -2\le x<0 \\ x & 0\le x<2 \end{cases}$ werde 4–periodisch fortgesetzt.

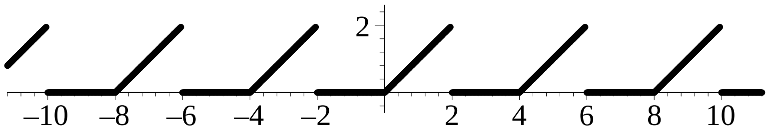
a) Skizzieren Sie die Funktion!

b) Wie muss bei der Fourierentwicklung $F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kCx+b_k\sin kCx)$ der Parameter $C$ gewählt werden?

c) Berechnen Sie die Fourierreihe $F(x)$ ! Geben Sie insbesondere explizit die Approximation der Funktion durch ein trigonometrisches Polynom 1. Grades $F_1(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos Cx+b_1\sin Cx$ an!

d) Für welche $x$ konvergiert die Fourierreihe $F(x)$ gegen $f(x)$, was passiert für die $x$, für die keine Konvergenz gegen $f(x)$ erfolgt?

**Lösung:**

a) 


b) $C=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

c) $a_k=\frac{2}{4}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\cos k\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x\cos k\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x,$

$$a_0=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}2=1,$$

$k\ge 1:$

$$\int x\cos k\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi k}x\sin k\frac{\pi}{2}x-\frac{2}{\pi k}\int\sin k\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi k}x\sin k\frac{\pi}{2}x+\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2\cos k\frac{\pi}{2}x,$$

$$a_k=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi k}x\sin k\frac{\pi}{2}x+\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2\cos k\frac{\pi}{2}x\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}\sin k\pi+\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2\cos k\pi-\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2\left((-1)^k-1\right)=\begin{cases} -\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade}\end{cases}$$

$$b_k=\frac{2}{4}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\sin k\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\sin k\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int x\sin k\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi k}x\cos k\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi k}\int\cos k\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi k}x\cos k\frac{\pi}{2}x+\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2\sin k\frac{\pi}{2}x,$$

$$b_k=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi k}x\cos k\frac{\pi}{2}x+\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2\sin k\frac{\pi}{2}x\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi k}\cos k\pi+\left(\frac{2}{\pi k}\right)^2\sin k\pi\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi k}(-1)^k=(-1)^{k+1}\frac{2}{\pi k}$$

$$f(x) \sim F(x) = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{(\pi k)^2}\cos k\frac{\pi}{2}x + \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin k\frac{\pi}{2}x\right)$$

Speziell gilt (ergibt sich natürlich auch für $k=1$ aus den allgemein berechneten Koeffizienten):

$$a_1 = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{\pi}{2}x\,dx,\ \int x\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{\pi}x\sin\frac{\pi}{2}x - \frac{2}{\pi}\int\sin\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{\pi}x\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}x,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi}x\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi}\right) = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx,\ \int x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx = -\frac{2}{\pi}x\cos\frac{\pi}{2}x + \frac{2}{\pi}\int\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = -\frac{2}{\pi}x\cos\frac{\pi}{2}x + \frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}x,$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi}x\cos\frac{\pi}{2}x + \frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi}\cdot(-1)\right) = \frac{2}{\pi}$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}x + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x$$

d) $f(x)$ ist stetig für $x \neq 2+4k,\ k \in \mathbb{Z}$. Daher gilt $F_n(x) \longrightarrow \begin{cases} f(x) & x \neq 2+4k \\ \dfrac{f(2-0)+f(2+0)}{2} = 1 & x = 2+4k \end{cases}$