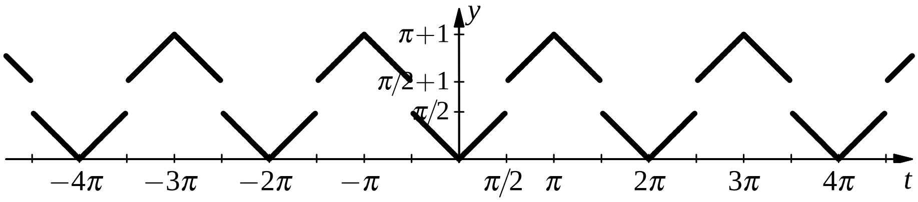
Aufgabe 14.28

Die über dem Intervall $-\pi \le t \le \pi$ durch $f(t) = \begin{cases} |t|, & |t| \le \dfrac{\pi}{2} \\ |t|+1, & \dfrac{\pi}{2} < |t| \le \pi \end{cases}$ definierte Funktion werde periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Die so entstandene Funktion soll überall mit $f(t)$ bezeichnet werden.

a) Skizzieren Sie die periodisch fortgesetzte Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion $f(t)$ in eine Fourierreihe, berechnen Sie die Fourierkoeffizienten bis $k=3$!
c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Lösung:

a)



b) $f(t)$ gerade, Periodenlänge 2π: $\quad f(t) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos kt\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos kt\,\mathrm{d}t$$

$$\int t\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{t\sin kt}{k} - \int \frac{\sin kt}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{t\sin kt}{k} + \frac{\cos kt}{k^2} + C \quad \text{für} \quad k \ne 0$$

$$a_k = \left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{t\sin kt}{k} + \frac{\cos kt}{k^2}\right)\right]_0^{\pi} + \left[\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin kt}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\sin k\pi - 0}{k} + \frac{\cos k\pi - 1}{k^2} + \frac{\sin k\pi - \sin\frac{k\pi}{2}}{k}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2} - \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade}, \ne 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{2}{k^2} - \dfrac{1}{k}\right) = -\dfrac{2k+4}{\pi k^2}, & k = 4l+1 \\ \dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{2}{k^2} + \dfrac{1}{k}\right) = +\dfrac{2k-4}{\pi k^2}, & k = 4l+3 \end{cases}$$

In der Aufgabe ist nur verlangt: $a_1 = \dfrac{2}{\pi}(-2-1) = -\dfrac{6}{\pi}$, $\ a_2 = 0$, $\ a_3 = \dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{9\pi}$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}t\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\Big[t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2+\pi}{2} = \pi + 1$$

$$f(t) \sim \frac{\pi+1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(-6\cos t + \frac{2}{9}\cos 3t - \frac{14}{25}\cos 5t + \frac{10}{49}\cos 7t \mp \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi+1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{2(4l+1)+4}{(4l+1)^2}\cos(4l+1)t + \frac{2(4l+3)-4}{(4l+3)^2}\cos(4l+3)t\right)$$

$$= \frac{\pi+1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{8l+6}{(4l+1)^2}\cos(4l+1)t + \frac{8l+2}{(4l+3)^2}\cos(4l+3)t\right)$$

In der Aufgabenstellung ist nur verlangt: $f(t) =\sim \dfrac{\pi+1}{2} - \dfrac{6}{\pi}\cos t + \dfrac{2}{9\pi}\cos 3t + \cdots$.

c) Die Konvergenz erfolgt gegen $\begin{cases} f(t), & t \neq (2l+1)\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+1\right) = \dfrac{\pi+1}{2}, & t = (2l+1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.