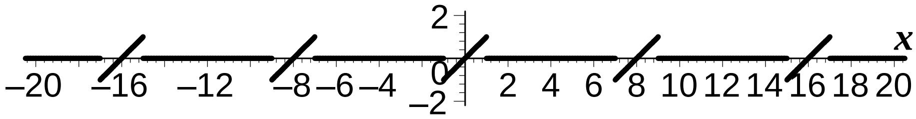
Aufgabe 14.25

Die Funktion $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1 \\ 0, & 1<|x|\le 4 \end{cases}$ werde periodisch fortgesetzt und mittels Fourierentwicklung durch trigonometrische Polynome $F_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kCx+b_k\sin kCx)$ approximiert.

a) Skizzieren Sie die periodisch fortgesetzte Funktion!
b) Wie groß ist die Periodenlänge, wie muss die Konstante C gewählt werden?
c) Berechnen Sie $F_2(x)$!
d) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge $\{F_n(x)\}$?

Lösung:

a)



b) Periodenlänge $T=8,\quad C=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

c) $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{4}x+b_k\sin\frac{k\pi}{4}x$

$a_k=0,\ k=0,1,2,\ldots,$ da $f(x)$ ungerade

$$b_k=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}f(x)\sin\frac{k\pi}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}x\sin\frac{k\pi}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}x\sin\frac{k\pi}{4}x\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sin\frac{k\pi}{4}x\,\mathrm{d}x=x\left(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{4}x\right)+\frac{4}{k\pi}\int\cos\frac{k\pi}{4}x\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{k\pi}x\cos\frac{k\pi}{4}x+\frac{16}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{4}x$$

$$b_k=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{k\pi}x\cos\frac{k\pi}{4}x+\frac{16}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{4}x\right)\Bigg|_0^1=-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{4}+\frac{8}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{4}$$

$$b_1=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{8}{\pi^2}-\frac{2}{\pi}\right),\quad b_2=\frac{8}{4\pi^2}=\frac{2}{\pi^2}$$

$$F_2(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}(4-\pi)\sin\frac{\pi}{4}x+\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{2\pi}{4}x\approx 0.12300\sin\frac{\pi}{4}x+0.20264\sin\frac{\pi}{2}x$$

d) Konvergenz gegen $\begin{cases} f(x), & x\ne\pm1+8l,\ l\in\mathbb{Z} \\ 1/2, & x=1+8l,\ l\in\mathbb{Z} \\ -1/2, & x=-1+8l,\ l\in\mathbb{Z} \end{cases}$