Aufgabe 14.24

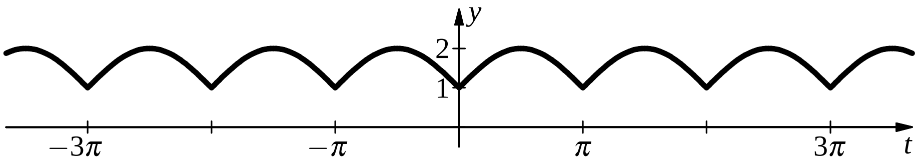
Die über dem Intervall $-\pi < t \leq \pi$ durch $f(t) = \begin{cases} 1-\sin t, & -\pi < t < 0 \\ 1+\sin t, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$ definierte Funktion werde periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Die so entstandene Funktion soll überall mit $f(t)$ bezeichnet werden.

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t)$!
b) Entwickeln Sie die Funktion $f(t)$ in eine Fourierreihe!

Hinweis: $\cos x \, \sin y = \dfrac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$

Lösung:

a)



b) Periodenlänge 2π, $f(t)$ stetig und stückweise monoton, also $f(t) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$.
Da $f(t)$ gerade ist, gilt $b_k = 0 \;\; \forall k$.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\sin t)\,\cos kt\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos kt + \cos kt\,\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(2\cos kt + \sin(k+1)t - \sin(k-1)t\big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\frac{\sin kt}{k} - \frac{\cos(k+1)t}{k+1} + \frac{\cos(k-1)t}{k-1}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k-1}\right) - \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k-1}\right), & k \text{ ungerade}, \neq 1 \\ \dfrac{1}{\pi}\left(+\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k-1}\right) - \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k-1}\right), & k \text{ gerade}, \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade}, \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k-1}\right) = -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(k-1)(k+1)}, & k \text{ gerade}, \neq 0 \end{cases}$$

Für $k=0$ und $k=1$ ist die Integration wegen der dann dabei auftretenden Division durch 0 nicht in der angegebenen Form durchführbar.

Es gilt $\quad a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1+\sin t)t\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}(t-\cos t)\Big|_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}(\pi+1-(-1)) = 2\dfrac{\pi+2}{\pi} = 2 + \dfrac{4}{\pi}$

und $\quad a_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(2\cos t + \sin 2t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\left(2\sin t - \dfrac{\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = 0,$

so dass a_k auch für das ungerade $k=1$ verschwindet.

Die Fourierentwicklung lautet also

$$f(t) = 1 + \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos 2lt}{(2l-1)(2l+1)} = 1 + \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5\cdot 7} \pm \cdots\right).$$