Aufgabe 14.23

Die über dem Intervall $-4<t\le 4$ durch $f(t)=\cos\dfrac{\pi}{8}t$ definierte Funktion soll außerhalb dieses Intervalls periodisch fortgesetzt werden.

a) Skizzieren Sie die durch periodische Fortsetzung entstehende Funktion!

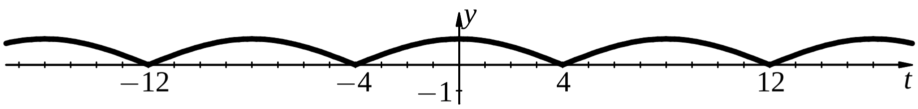
b) Berechnen Sie die Fourierreihe!

Hinweis: $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$, $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\big)$

c) Gegen welchen Werte konvergiert die Fourierreihe?

Lösung:

a)



b) Periodenlänge $T=8$

Da die Funktion gerade ist, gilt $f(t)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\cos\dfrac{k\pi}{4}t$ mit $a_k=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-4}^{4}f(t)\cos\dfrac{k\pi}{4}t\,\mathrm{d}t$.

$$a_k=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}\cos\frac{\pi}{8}t\cos\frac{k\pi}{4}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{0}^{4}\cos\frac{k\pi}{4}t\cos\frac{\pi}{8}t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^4\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{8}t+\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\,\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{8}t}{2k-1}+\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{8}t}{2k+1}\right)\Bigg|_0^4$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1}+\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1}\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2k-1}+\dfrac{-1}{2k+1}\right), & k \text{ ungerade}\\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{-1}{2k-1}+\dfrac{1}{2k+1}\right), & k \text{ gerade}\end{cases}$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=(-1)^{k+1}\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{4k^2-1},\quad\text{speziell } a_0=\frac{4}{\pi}$$

$$f(t)\sim\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{4k^2-1}\cos\frac{k\pi}{4}t=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{3\pi}\cos\frac{\pi}{4}t-\frac{4}{15\pi}\cos\frac{2\pi}{4}t\pm\ldots$$

c) Da die periodisch fortgesetzte Funktion überall stetig und stückweise monoton ist, konvergiert die Fourierreihe für alle Punkte gegen diese Funktion.