Aufgabe 14.22

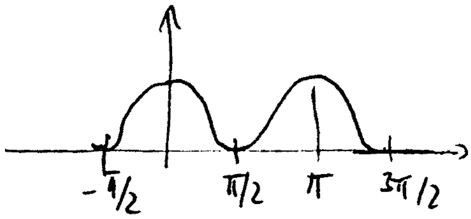
Entwickeln Sie $f(x)=\cos^2 x$ in eine Fourierreihe!

Hinweis: Formen Sie den Integranden $\cos^2 x\cos 2kx$ durch zweimalige Anwendung der Formel $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ in eine Summe von Kosinusfunktionen um!

Lösung:

$f(x)=\cos^2 x$

Periodenlänge π,
gerade Funktion



$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 x\cos 2kx\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\cos^2 x\cos 2kx&=\frac{1}{2}\cos(2k+1)x\cos x+\frac{1}{2}\cos(2k-1)x\cos x\\&=\frac{1}{4}\cos(2k+2)x+\frac{1}{4}\cos 2kx+\frac{1}{4}\cos 2kx+\frac{1}{4}\cos(2k-2)x\end{aligned}$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos(2k+2)x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos 2kx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos(2k-2)x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^\pi\cos lx\,\mathrm{d}x=\left.\frac{\sin lx}{l}\right|_0^\pi=0\ \text{ für } l\neq 0,\qquad \int_0^\pi\cos 0x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\mathrm{d}x=\pi$$

Für $k\geq 2$ folgt $a_k=0$.

$$a_1=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos 4x\,\mathrm{d}x}_{0}+\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos 2x\,\mathrm{d}x}_{0}+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos 0x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\pi=\frac{1}{2}$$

$$a_0=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos 2x\,\mathrm{d}x}_{0}+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos 0x\,\mathrm{d}x+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos 2x\,\mathrm{d}x}_{0}=\frac{1}{\pi}\pi=1$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos^2 x\sin 2kx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\underbrace{\cos^2 x\sin 2kx}_{\text{ungerade}}\,\mathrm{d}x=0$$

Also: $\underline{\underline{\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x}}$

(Das ist ohnehin bekannt: Formel für doppelten Winkel $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, ergibt sich auch für die Formel im Hinweis mit $x=\alpha=\beta$.)