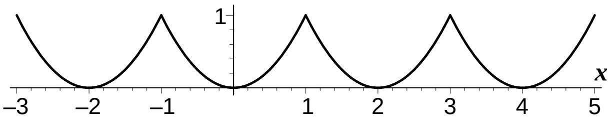
Aufgabe 14.20

Die Funktion $f(x)=x^2,\ -1\le x\le 1$ werde periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Bestimmen Sie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$!

Lösung:

a)



b) Periodenlänge 2, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\pi x+b_k\sin k\pi x)$,

$$a_k=\int_{-1}^{1}f(x)\cos k\pi x\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\cos k\pi x\,\mathrm{d}x,\quad b_k=\int_{-1}^{1}f(x)\sin k\pi x\,\mathrm{d}x=0,\text{ da gerade}$$

$$k\ge 1:\quad \int x^2\cos k\pi x\,\mathrm{d}x=x^2\frac{\sin k\pi x}{k\pi}-2\int x\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\mathrm{d}x$$

$$=x^2\frac{\sin k\pi x}{k\pi}-2\left(-x\frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2}+\int\frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=x^2\frac{\sin k\pi x}{k\pi}+2x\frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2}-2\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^3}$$

$$a_k=\left[x^2\frac{\sin k\pi x}{k\pi}+2x\frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2}-2\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^3}\right]_{-1}^{1}=4\frac{\cos k\pi}{(k\pi)^2}=4\frac{(-1)^k}{(k\pi)^2}$$

$$k=0:\quad a_0=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos k\pi x$$

c) Die Fourierentwicklung kann zur Berechnung von $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\frac{1}{25}\pm\cdots$ genutzt werden. Da $f(x)$ stetig ist, konvergiert die Fourierreihe, für $x=0$ ergibt sich

$$f(0)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=0,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{-\frac{\pi^2}{12}}}$$