Aufgabe 14.19

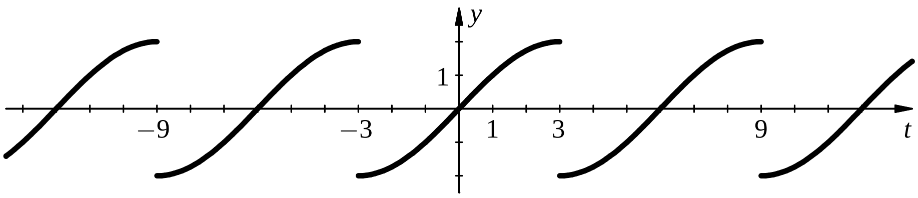
Bei den Aufgaben 18.135, 11.62, 14.19 und 12.174 soll die Funktion $f(t)=2\sin\frac{\pi}{6}t$ auf verschiedene Weise approximiert bzw. interpoliert werden.

Die Funktion $f(t)$ soll nur über dem Intervall $-3<t\le 3$ durch die obige Vorschrift gegeben und außerhalb dieses Intervalls periodisch fortgesetzt und durch eine Fourierreihe approximiert werden.

a) Skizzieren Sie die durch periodische Fortsetzung entstehende Funktion!
b) Berechnen Sie die Fourierreihe!
Hinweis: $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$, $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$
c) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe für $t=3$?

Lösung:

a)



b) Periodenlänge $T=6$
Da die Funktion ungerade ist, gilt $f(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi}{3}t$ mit $b_k=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(t)\sin\frac{k\pi}{3}t\,\mathrm{d}t$.

$$b_k=\frac{2}{3}\int_{-3}^{3}\sin\frac{\pi}{6}t\,\sin\frac{k\pi}{3}t\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\int_{0}^{3}\sin\frac{\pi}{6}t\,\sin\frac{k\pi}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\int_{0}^{3}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}t\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\,\frac{6}{\pi}\left(\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{6}t}{2k-1}-\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{6}t}{2k+1}\right)\Bigg|_0^3$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1}-\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1}\right)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{-1}{2k+1}\right), & k \text{ ungerade}\\ \frac{4}{\pi}\left(\frac{-1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right), & k \text{ gerade}\end{cases}$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}\right)=(-1)^{k+1}\frac{4}{\pi}\,\frac{4k}{4k^2-1}=(-1)^{k+1}\frac{16}{\pi}\,\frac{k}{4k^2-1}$$

$$f(t)\sim\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{4k^2-1}\sin\frac{k\pi}{3}t=\frac{16}{3\pi}\sin\frac{\pi}{3}t-\frac{32}{15\pi}\sin\frac{2\pi}{3}t\pm\ldots$$

c) $\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{k}{4k^2-1}\sin\frac{k\pi}{3}3=\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{k}{4k^2-1}\sin k\pi=0$, also gilt auch für den Grenzwert $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{k}{4k^2-1}\sin\frac{k\pi}{3}3=0$ gegenüber $f(3)=2$.

oder Satz von Dirichlet: $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{k}{4k^2-1}\sin\frac{k\pi}{3}3=\frac{-2+2}{2}=0$