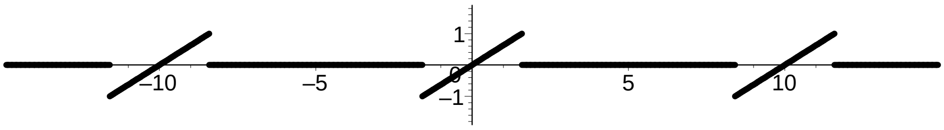
Aufgabe 14.18

Die über dem Intervall $[-5,5]$ durch $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{5}x, & |x|\le\dfrac{5}{\pi}\\ 0, & \dfrac{5}{\pi}<|x|\le 5\end{cases}$ definierte Funktion werde periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Untersuchen Sie die Fourierreihe mit dem Satz von Dirichlet auf Konvergenz!

Lösung:

a) 

b) $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\dfrac{2\pi}{T}x+b_k\sin\dfrac{2\pi}{T}x\right)$,

$$a_k=\frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos k\frac{2\pi}{T}x\,\mathrm{d}x,\ b_k=\frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin k\frac{2\pi}{T}x\,\mathrm{d}x$$

Periodenlänge hier $T=10$, $a_k=0$, da $f(x)$ ungerade,

$$b_k=\frac{1}{5}\int\limits_{-5}^{5}f(x)\sin k\frac{\pi}{5}x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\int\limits_{0}^{5/\pi}\frac{\pi}{5}x\sin k\frac{\pi}{5}x\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{25}\int\limits_{0}^{5/\pi}x\sin k\frac{\pi}{5}x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int x\sin k\frac{\pi}{5}x\,\mathrm{d}x=-x\frac{5}{k\pi}\cos k\frac{\pi}{5}x+\frac{5}{k\pi}\int\cos k\frac{\pi}{5}x\,\mathrm{d}x=-\frac{5}{k\pi}x\cos k\frac{\pi}{5}x+\frac{25}{(k\pi)^2}\sin k\frac{\pi}{5}x,$$

$$\int\limits_{0}^{5/\pi}x\sin k\frac{\pi}{5}x\,\mathrm{d}x=-\frac{5}{k\pi}x\cos k\frac{\pi}{5}x+\frac{25}{(k\pi)^2}\sin k\frac{\pi}{5}x\Bigg|_{0}^{5/\pi}=-\frac{25}{k\pi^2}\cos k+\frac{25}{k^2\pi^2}\sin k,$$

$$b_k=-\frac{2}{k\pi}\cos k+\frac{2}{k^2\pi}\sin k=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin k}{k^2}-\frac{\cos k}{k}\right),$$

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin k}{k^2}-\frac{\cos k}{k}\right)\sin\frac{k\pi}{5}x$$

c) Über dem Intervall $[-5,5]$ lässt sich die Funktion $f(t)$ in endlich viele (nämlich 3) Teilintervalle zerlegen, in denen sie stetig und monoton ist. An den Unstetigkeitsstellen existieren die einseitigen Grenzwerte (0 und ±1).

Nach dem Satz von Dirichlet konvergiert die Fourierreihe gegen $f(t)$ in allen Stetigkeitspunkten und gegen $\dfrac{1}{2}(0+\pm1)=\pm\dfrac{1}{2}$ an den Sprungstellen. Also gilt

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\sin k}{k^2}-\frac{\cos k}{k}\right)\sin\frac{k\pi}{5}t=\begin{cases}f(t) & t\ne\pm\dfrac{5}{\pi}+10l\\ \dfrac{1}{2} & t=\dfrac{5}{\pi}+10l\\ -\dfrac{1}{2} & t=-\dfrac{5}{\pi}+10l\end{cases},\ l\in\mathbb{Z}.$$

In jedem abgeschlossenen Teilintervall, in dem $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz der Fourierreihe gleichmäßig.