Aufgabe 14.17

Gegeben sei die Funktion $f(x) = |\sin 2x|$.

a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Wie groß ist die (kürzeste) Periodenlänge?

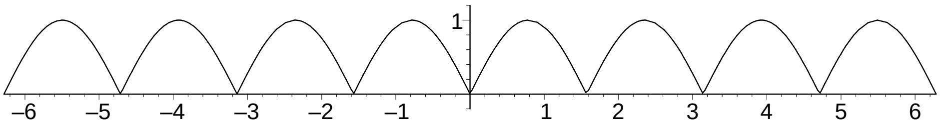
c) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!

Hinweis: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$

d) Bestimmen Sie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$!

Lösung:

a)



b) $T = \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 4kx + b_k \sin 4kx)$ mit

$$a_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x|\cos 4kx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos 4kx\,\mathrm{d}x,$$

$$b_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x|\sin 4kx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sin 4kx\,\mathrm{d}x$$

Funktion gerade $\implies$ $b_k = 0$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)) \implies$$

$$\sin 2x\cos 4kx = \frac{1}{2}(\sin(2-4k)x+\sin(2+4k)x) = \frac{1}{2}(\sin(4k+2)x-\sin(4k-2)x)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4k+2)x\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4k-2)x\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(4k+2)x}{4k+2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\frac{\cos(4k-2)x}{4k-2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2k+1)\pi-1}{4k+2} + \frac{2}{\pi}\frac{\cos(2k-1)\pi-1}{4k-2} = -\frac{2}{\pi}\frac{-2}{4k+2} + \frac{2}{\pi}\frac{-2}{4k-2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}$$

$$a_0 = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{-1} = \frac{4}{\pi}, \quad \text{also} \quad |\sin 2x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\cos 4kx$$

d) Da $f(x)$ stetig ist, konvergiert die Fourierreihe überall. Für $x = 0$ ergibt sich

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}, \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}.$$