Aufgabe 14.15

Die Funktion $\quad f(t)=\begin{cases}\cos t-\frac{1}{2}, & 0\le|t|\le\frac{\pi}{3}\\ 0, & \frac{\pi}{3}<|t|\le\pi\end{cases}$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!

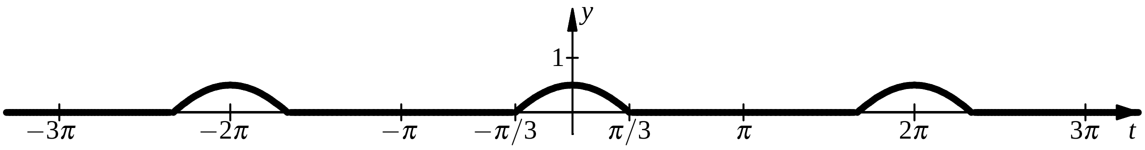
b) Entwickeln Sie die Funktion $f(t)$ in eine Fourierreihe! Geben Sie dabei die Koeffizienten bis einschließlich $k=2$ zahlenmäßig an!

c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Hinweis: $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

Lösung:

a)



b) $f(t)\sim a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$. Da $f(t)$ gerade ist, gilt $b_k=0\ \ \forall k$.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/3}\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)\cos kt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/3}\left(\cos t\,\cos kt-\frac{1}{2}\cos kt\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/3}(\cos(k+1)t+\cos(k-1)t-\cos kt)\,\mathrm{d}t$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\pi}\frac{\sin(k+1)t}{k+1}\bigg|_0^{\pi/3}}_{=\frac{1}{\pi}\frac{\sin(k+1)\frac{\pi}{3}}{k+1}}+\underbrace{\frac{1}{\pi}\frac{\sin(k-1)t}{k-1}\bigg|_0^{\pi/3}}_{\substack{=\frac{1}{\pi}\frac{\sin(k-1)\frac{\pi}{3}}{k-1}\\ \text{für }k\neq1}}-\underbrace{\frac{1}{\pi}\frac{\sin kt}{k}\bigg|_0^{\pi/3}}_{\substack{=\frac{1}{\pi}\frac{\sin k\frac{\pi}{3}}{k}\\ \text{für }k\neq0}}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/3}(2\cos t-1)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}(2\sin t-t)\bigg|_0^{\pi/3}=\frac{1}{\pi}\left(2\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}-\frac{1}{3}\approx0.217996$$

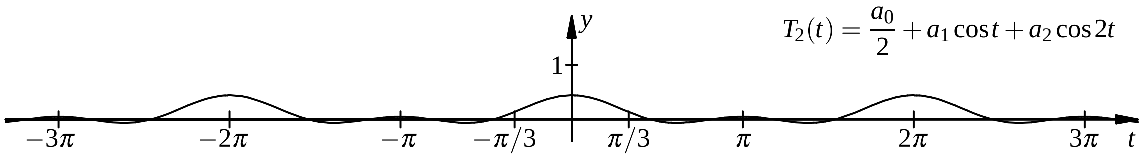
$$a_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/3}(\cos 2t+1-\cos t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2}+t-\sin t\right)\bigg|_0^{\pi/3}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}+\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\approx0.195501$$

$$a_2=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{3\pi}{3}}{3}+\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1}-\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{\pi}\frac{1}{4}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\approx0.137832$$

$$f(t)\sim\frac{\sqrt{3}}{2\pi}-\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right)\cos t+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\sin(k+1)\frac{\pi}{3}}{k+1}+\frac{\sin(k-1)\frac{\pi}{3}}{k-1}-\frac{\sin k\frac{\pi}{3}}{k}\right)\cos kt$$

$$\approx0.108998+0.195501\cos t+0.137832\cos 2t+\ldots$$



c) Da $f(t)$ überall stetig ist, konvergiert die Fourierreihe überall gegen $f(t)$.