Aufgabe 14.12

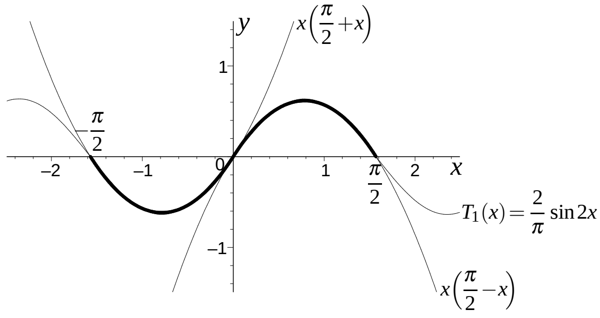
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right), \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

a) Skizzieren Sie $f(x)$!

b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ mit Hilfe der Fourierentwicklung durch ein trigonometrisches Polynom 1. Grades $T_1(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2x + b_1 \sin 2x$!

Lösung:

a) $f(x) = \begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2} + x\right), & -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \\ x\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$



b) $a_0 = a_1 = 0$, da es sich um eine ungerade Funktion handelt.

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin 2x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x\,dx$$

$$\int x\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int x^2\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

$$b_1 = -x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{\pi}x^2\cos 2x - \frac{2}{\pi}x\sin 2x - \frac{1}{\pi}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\right) - \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}$$

$$\underline{\underline{T_1(x) = \frac{2}{\pi}\sin 2x}}$$

(Dieses trigonometrische Polynom wurde in die Skizze bei a) mit eingezeichnet. Es approximiert die gegebene Funktion schon recht gut. So sind die Funtkionswerte der gegebenen Funktion in den Scheitelpunkten bei $x = \pm\frac{\pi}{4}$ gleich $\pm\frac{\pi^2}{16} \approx \pm 0{,}61685$, die des trigonometrischen Polynoms dort $\pm\frac{2}{\pi} \approx \pm 0{,}63662$.)