Aufgabe 14.8

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x,\ 0 \le x \le \pi$

a) in eine reine Kosinusreihe,
b) in eine reine Sinusreihe!
c) Bestimmen Sie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$!

Lösung:

Fourierreihen (für **periodische** Funktionen)

Periodenlänge 2π

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos kx \, dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin kx \, dx$$

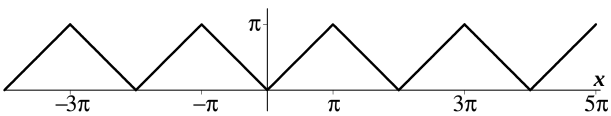
Periodenlänge T

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\frac{2\pi}{T}x + b_k \sin k\frac{2\pi}{T}x \right)$$
$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, \cos k\frac{2\pi}{T}x \, dx$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, \sin k\frac{2\pi}{T}x \, dx$$

Eine **reine Kosinusreihe** ergibt sich für **gerade Funktionen**, eine **reine Sinusreihe** ergibt sich für **ungerade Funktionen**.

Für die gestellte Aufgabe muss also die über $[0,\pi]$ definierte Funktion zunächst gerade bzw. ungerade auf $(-\pi,0)$ fortgesetzt werden. Anschließend ist die nun über $(-\pi,\pi]$ definierte Funktion periodisch fortzusetzen, so dass sich die Periodenlänge 2π ergibt.

a) $f(x)=x,\ 0\le x\le\pi$ muss gerade auf $[-\pi,\pi]$ fortgesetzt werden:
$f(x)=|x|,\ -\pi\le x\le\pi$. Diese Funktion ist dann periodisch fortzusetzen, Periodenlänge 2π.



$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx, \quad \text{da Integrand gerade}$$

$b_k = 0$, da gerade (Bei Berechnung wäre Integrand $|x| \sin kx$ ungerade $\Longrightarrow$ Integral 0.)

$$\int x \cos kx \, dx = x\frac{\sin kx}{k} - \int \frac{\sin kx}{k} \, dx = \frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \quad \text{für } k \ne 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin kx}{k}+\frac{\cos kx}{k^2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k-1\right)$$

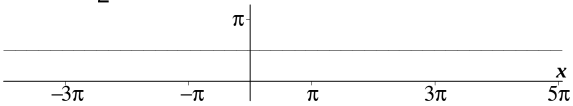
$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade}, \neq 0 \end{cases}$$

Da $f(x)$ überall stetig ist, konvergiert die Fourierreihe überall, so dass

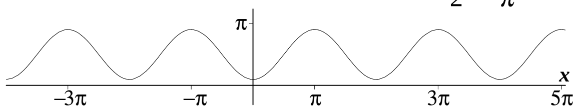
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{cos 5x}{5^2} + \dots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad \text{gilt.}$$

$$F_{2n+1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

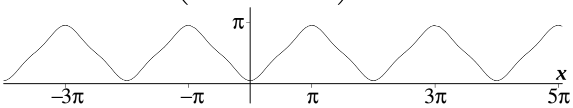
$F_0(x) = \dfrac{\pi}{2}$



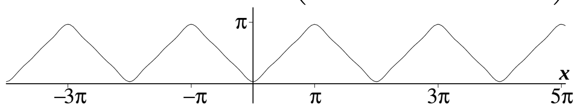
$F_1(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\cos x$



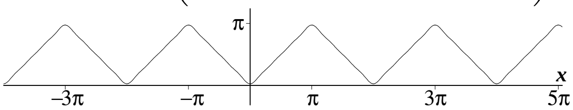
$F_3(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{\cos 3x}{9}\right)$



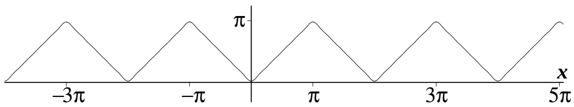
$F_5(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{\cos 3x}{9} + \dfrac{\cos 5x}{25}\right)$



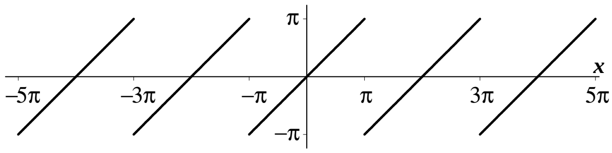
$F_7(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{\cos 3x}{9} + \dfrac{\cos 5x}{25} + \dfrac{\cos 7x}{49}\right)$



$F_9(x)$



b) $f(x)=x,\ 0\le x\le\pi$ muss ungerade auf $(-\pi,\pi]$ fortgesetzt werden:
$f(x)=x,\ -\pi<x\le\pi$. Diese Funktion ist dann periodisch fortzusetzen, Periodenlänge 2π.



$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,\mathrm{d}x, \quad \text{da Integrand gerade}$$

$a_k = 0$, da ungerade (Bei Berechnung wäre Integrand $x\cos kx$ ungerade $\Longrightarrow$ Integral 0.)

$$\int x\sin kx\,\mathrm{d}x = x\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) + \int\frac{\cos kx}{k}\,\mathrm{d}x = -\frac{x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}$$

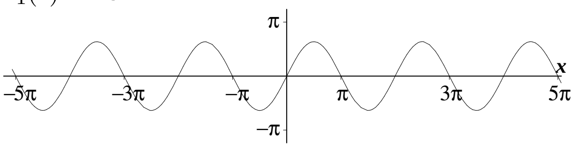
($k=0$ kommt nicht vor, da Sinuskoeffizient.)

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx \,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{2\cos k\pi}{k} = \frac{2\,(-1)^{k+1}}{k}$$

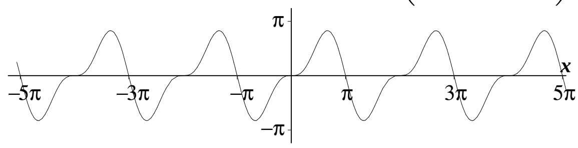
$$f(x) \sim 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \pm \ldots\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}$$

$$F_n(x) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}$$

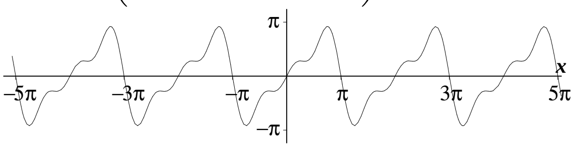
$F_1(x) = 2\sin x$



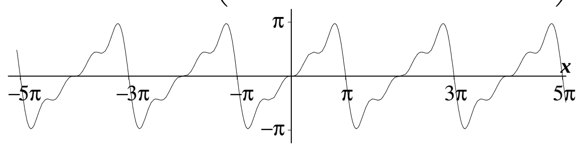
$F_2(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$



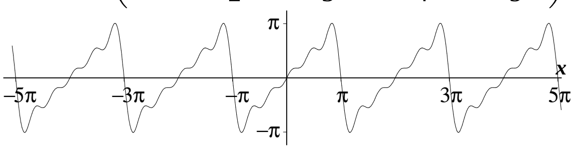
$F_3(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}\right)$



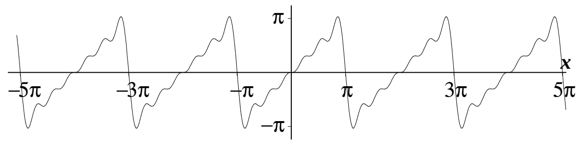
$F_4(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4}\right)$



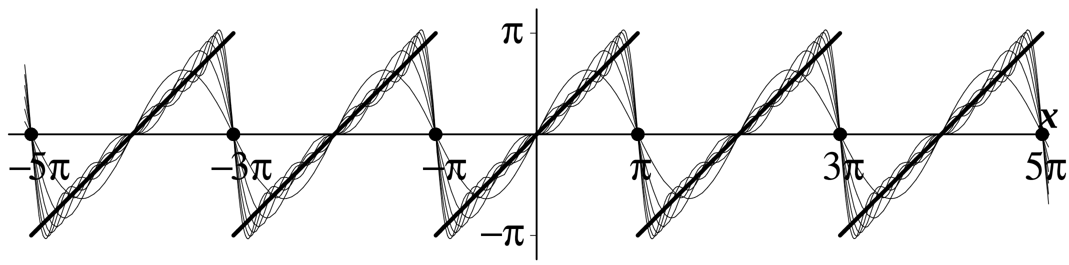
$F_5(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}\right)$



$F_6(x)$



Nach dem Satz von Dirichlet konvergiert die Fourierreihe gegen $f(x)$ für $x \neq (2m+1)\pi$ und gegen $\frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0$ für $x = (2m+1)\pi$.



c) Da die Fourierreihe aus a) überall konvergiert, konvergiert sie auch für $x = 0$, also gilt

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{und damit} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.2337.$$