Aufgabe 14.7

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=\ln(2x+3)$ an der Stelle $x_0=-1$ in eine Taylorreihe!
b) Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe. Geben Sie deren Mittelpunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius!
c) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,2^n}=\ln\frac{3}{2}$ gilt!

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(2x+3) & f(-1) &= \ln 1 = 0\\
f'(x) &= 2\,(2x+3)^{-1} & f'(-1) &= 2\cdot 1^{-1}=2\\
f''(x) &= -2^2\,(2x+3)^{-2} & f''(-1) &= -2^2\\
f'''(x) &= 2^3\cdot 2\,(2x+3)^{-3} & f'''(-1) &= 2^3\,2!\\
f^{(4)}(x) &= -2^4\cdot 2\cdot 3\,(2x+3)^{-4} & f^{(4)}(-1) &= -2^4\,3!\\
f^{(5)}(x) &= 2^5\cdot 4!\,(2x+3)^{-5} & f^{(5)}(-1) &= 2^5\,4!\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1}2^n\,(n-1)!\,(2x+3)^{-n} & f^{(n)}(-1) &= (-1)^{n+1}2^n\,(n-1)!
\end{aligned}$$

Als Taylorentwicklung ergibt sich somit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x-(-1))^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n\,(n-1)!}{n!}(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}(x+1)^n$$
$$=\frac{2}{1}(x+1)-\frac{2^2}{2}(x+1)^2+\frac{2^3}{3}(x+1)^3-\frac{2^4}{4}(x+1)^4\pm\cdots.$$

b) Der Mittelpunkt der Potenzreihe ist offenbar -1. Für den Konvergenzradius ergibt sich aus $a_n=\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}$ $\quad r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$. Somit konvergiert die Taylorreihe in einem Intervall mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um -1, also im Intervall $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

c) Damit mit der gerade hergeleiteten Taylorentwicklung gearbeitet werden kann, muss $\frac{(-1)^{n+1}}{n\,2^n}=\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}(x+1)^n$ sein, also $\frac{1}{2}=2(x+1)$, $x=-\frac{3}{4}$. Dieses x liegt im Konvergenzintervall der Taylorreihe, also gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,2^n}=\ln\left(2(-\frac{3}{4})+3\right)=\ln\frac{3}{2}$.