Aufgabe 14.6

Sei m eine beliebige reelle Zahl.

a) Entwickeln Sie $f(x) = (1+x)^m$ nach Potenzen von x !
b) Beweisen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass die Reihe für $|x|<1$ konvergiert!
c) Zeigen Sie, dass für $|x|<1$ $\quad (1+x)^{-3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}(-x)^n$ gilt!
d) Stellen Sie 1.001^{-3} und die Approximation davon durch Taylorpolynome nullten, ersten, zweiten und dritten Grades gegenüber!

Lösung:

a)
$$\begin{array}{ll} f(x)=(1+x)^m & f(0)=1 \\ f'(x)=m(1+x)^{m-1} & f'(0)=m \\ f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2} & f''(0)=m(m-1) \\ f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} & f''(0)=m(m-1)(m-2) \\ \ldots & \ldots \\ f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n} & f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) \end{array}$$

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$$

b) Quotientenkriterium: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n} = \dfrac{m-n}{n+1}x \longrightarrow -x$ für $n\to\infty$

$\Longrightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$ ab gewissem n für $|x|<1$.
Nach dem Quotientenkriterium liegt damit für $|x|<1$ Konvergenz vor.

c) Für $m=-3$ gilt $\dbinom{m}{n} = \frac{(-3)(-3-1)\cdots(-3-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} = \frac{(-3)(-4)\cdots(-(n+2))}{1\cdot 2\cdots n} = (-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad\Longrightarrow$

$(1+x)^{-3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-x)^n.$

d) $(1+x)^{-3} = 1-3x+6x^2-10x^3\pm\ldots,$
$P_0(0.001)=1,$
$P_1(0.001)=0.997,$
$P_2(0.001)=0.997\,006,$
$P_3(0.001)=0.997\,005\,990\,000, \qquad 1.001^{-3}=0.997\,005\,990\,015.$