Aufgabe 14.4

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$ an der Stelle $x_0=3$ in eine Taylorreihe!

b) Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe. Geben Sie deren Mittelpunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius!

c) Für welche x konvergiert die Taylorreihe?

Lösung:

a)
$$\begin{array}{lcl} f(x) &=& (x-5)^{-2} \\ f'(x) &=& -2\,(x-5)^{-3} \\ f''(x) &=& 3!\,(x-5)^{-4} \\ f'''(x) &=& -4!\,(x-5)^{-5} \\ \ldots & & \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} f(3) &=& (-2)^{-2} = 2^{-2} \\ f'(3) &=& -2\,(-2)^{-3} = 2\,2^{-3} \\ f''(3) &=& 3!\,(-2)^{-4} = 3!\,2^{-4} \\ f'''(3) &=& -4!\,(-2)^{-5} = 4!\,2^{-5} \\ \ldots & & \end{array}$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k(k+1)!\,(x-5)^{-k-2} \qquad f^{(k)}(3) = (-1)^k(k+1)!\,(-2)^{-k-2} = \frac{(k+1)!}{2^{k+2}}$$

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)!}{2^{k+2}k!}(x-3)^k = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}(x-3)^k$$

b) Die Reihe hat die Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$, ihr Mittelpunkt ist $x_0=3$, der Konvergenzradius ist

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{4}\,\frac{k+1}{2^k}\,4\,\frac{2^{k+1}}{k+2} = \lim_{k\to\infty} 2\,\frac{k+1}{k+2} = 2.$$

c) Die Taylorreihe konvergiert für alle x innerhalb des Konvergenzradius: $|x-3|<2$, d.h. $1<x<5$, sie divergiert für alle x außerhalb des Konvergenzradius: $|x-3|>2$, d.h. $x<1$ und $x>5$.

Für $x=1$ und $x=5$ muss die Konvergenz speziell untersucht werden:

$$x=1:\quad T(1) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}(-2)^k = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) = \frac{1}{4}(1-2+3-4+5-6\pm\cdots)$$

Da die Folge $\{(-1)^k(k+1)\}$ divergiert, divergiert die Reihe erst recht.

$$x=5:\quad T(5) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}2^k = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1) = \frac{1}{4}(1+2+3+4+5+6+\cdots)$$

divergiert ebenfalls offensichtlich.

Die Reihe konvergiert also nur für $1<x<5$.