Aufgabe 14.3

a) Sei $b>0$. Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{b-x}}$ an der Stelle $x_0=0$ in eine Taylorreihe!

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe!

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (b-x)^{-1/2} & f(0) &= b^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{b}}\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(b-x)^{-3/2} & f'(0) &= \frac{1}{2}b^{-3/2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{b\sqrt{b}}\\
f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(b-x)^{-5/2} & f''(0) &= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}b^{-5/2}=\frac{1\cdot 3}{2^2}\,\frac{1}{b^2\sqrt{b}}\\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}(b-x)^{-7/2} & f'''(0) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}b^{-7/2}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\,\frac{1}{b^3\sqrt{b}}\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
f^{(k)}(x) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k}(b-x)^{-(2k+1)/2} & f^{(k)}(0) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k\,b^k\sqrt{b}}
\end{aligned}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{x}{2\,b\sqrt{b}}+\frac{3x^2}{8\,b^2\sqrt{b}}+\frac{15x^3}{48b^3\sqrt{b}}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)x^k}{2^k\,k!\,b^k\sqrt{b}}$$

$2^k k! = 2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot 2\cdot k = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)$,

d.h. $\displaystyle f(x)=\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{x}{2\,b\sqrt{b}}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\,\frac{1}{b^k\sqrt{b}}\,x^k$

b) $$r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\,\frac{1}{b^k\sqrt{b}}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)\cdot(2k+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\cdot(2k+1)}\,\frac{b^{k+1}\sqrt{b}}{1}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)\,b}{2k+1}=b,$$

also ist die Reihe absolut konvergent (damit auch einfach konvergent) für $|x|<b$ und divergent für $|x|>b$.

(Für $x\geq b$ existiert allerdings die zu entwickelnde Funktion ohnehin nicht.)